ResearchGate

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: http://www.researchgate.net/publication/278713768

Développement d'une interface hybride à retour de force à 2 degrés de liberté

TECHNICAL REPORT · SEPTEMBER 2012

DOI: 10.13140/RG.2.1.3823.1208

DOWNLOADS

2

2 AUTHORS, INCLUDING:

Carlos Rossa

University of Alberta

17 PUBLICATIONS **28** CITATIONS

SEE PROFILE

Available from: Carlos Rossa

Retrieved on: 19 June 2015

INSA de Lyon
Département Génie Mécanique et Conception **Rapport de PFE**

Tuteur CEA : Carlos ROSSA
Tuteur INSA : Minh Tu Pham

Développement d'une interface hybride à retour de force à 2 degrés de liberté

Vincent SAMY

INSA Lyon, le 17 septembre 2013

Table des matières

1 Introduction **5**

2 Les interfaces haptiques **8**
2.1 Les interfaces actives . . . 8
2.1.1 Limitations . . . 8
2.2 Les interfaces passives . . . 9
2.2.1 Limitations . . . 9
2.2.2 Les interfaces passives MDDL . . . 11
2.3 Les interfaces hybrides . . . 12
2.3.1 Problématiques des interfaces hybrides . . . 13

3 Maximisation des freins **15**

4 Redondance **20**
4.1 Avantages et Inconvénients . . . 20

5 Analyse de systèmes mécaniques **21**
5.1 L'espace de travail . . . 21
5.2 Les singularités . . . 21
5.3 Les critères de performances . . . 22

6 Les systèmes étudiés **23**
6.1 Choix des systèmes . . . 23
6.2 Analyses existantes . . . 23
6.3 Méthode d'analyse de systèmes hybrides . . . 24
6.4 La redondance dans les systèmes passifs . . . 25
6.4.1 Recherche des zones . . . 25
6.4.2 Méthode de calcul . . . 28
6.5 Les critères de passivité dans les systèmes étudiés . . . 28
6.5.1 Réflexion sur le volume relatif de la ZP . . . 28
6.5.2 Réflexion sur l'angle de passivité . . . 29
6.5.3 Zoom sur un point optimal d'une zone . . . 29
6.5.4 Conclusion de l'analyse . . . 32

7 Simulation de systèmes hybrides **34**
7.1 Paramètres et ordres de grandeur . . . 34
7.2 Le modèle dynamique . . . 34
7.3 L'environnement virtuel . . . 34
7.4 La matrice Jacobienne transposée . . . 35
7.5 Le contrôleur . . . 35
7.6 Le modèle moteur . . . 35

7.7 Le modèle frein 35
7.8 Les lois de frottements 36
7.9 Simulation de murs virtuels 36
7.9.1 Suivi d'un mur virtuel 37

8 Conclusion **42**

9 Pour approfondir les recherches **42**

Bibliographie **46**

A Notations & définitions **47**

B Méthode de calcul du volume relatif de la ZP **48**

Table des figures

1 Actionneur hybride avec des freins magnéto-rhéologiques 6
2 Capacité de couple d'une interface frein-moteur 7
3 Simulation d'un ressort virtuel par un actionneur dissipatif 10
4 Phénomène de collage 10
5 Suivi d'un mur pour un système 2DDL 11
6 Système 2-barres 15
7 Les différentes régions de vitesse d'un système 2-barres 16
8 Les différentes régions de couple d'un système 2-barres 16
9 Zones de passivité système 2-barres 17
10 Représentation des $norme - 2$ et $norm - \infty$ 18
11 Ellipsoïde de manipulabilité d'un système 2-barres 19
12 Redondance d'un système mécanique 1DDL 20
13 Systèmes étudiés 23
14 Volume relatif de la ZP pour les systèmes 2-barres et 5-barres 25
15 Superposition des ellispoïdes du système 6-barres 26
16 Les 6 régions des ellispoïdes du système 6-barres 27
17 Volume relatif de la ZP du système 6-barres pour 3 actionneurs 29
18 Volume relatif de la ZP du système 5-barres pour 3 actionneurs 30
19 Volume relatif de la ZP du système 5-barres pour 4 actionneurs 30
20 Angle de passivité du système 6-barres pour 3 actionneurs 31
21 Angle de passivité du système 5-barres pour 3 actionneurs 31
22 Angle de passivité du système 5-barres pour 4 actionneurs 32
23 Superposition des ellipsoïdes-force à un point optimal 33
24 Schéma simplifié de la loi de commande du système 5-barres 36
25 Résultat de la simulation en ZP 38
26 Résultat de la simulation en ZP du système 6-barres 39
27 Résultat de la simulation en ZSP 40
28 Résultat de la simulation le long d'un mur virtuel du système 5-barres 41
29 Schéma explicatif de la recherche de points 48

Liste des tableaux

1 Paramètres des différents systèmes étudiés 28
2 Les paramètres de la simulation 34

1 Introduction

L'haptique désigne la science du toucher et se divise en deux grandes familles. D'une part le toucher et d'autre part la kinesthésie i.e. la perception du corps dans l'environnement. A l'instar des systèmes dédiés à la perception visuelle ou auditive, les interfaces haptiques à retour d'effort permettent de reconstituer les forces exercées lors d'une interaction avec un environnement. Tout l'art de cette discipline est de pouvoir retransmettre avec précision et en temps réel la sensation de toucher générée par l'environnement. Elles sont aussi bien utilisées pour un environnement réel (systèmes de téléopération, thérapies assistées par ordinateur [1],...) que virtuel (simulateur d'opération chirurgicale, simulateur d'opération de maintenance [2], aide à la recherche [3],...). Parmi elles on distingue deux familles d'interfaces : 1) A admittance (on mesure la force utilisateur et on impose un mouvement). 2) A impédance (on mesure un mouvement et on impose une force). Ces interfaces se divisent en trois groupes : les interfaces actives, passives et hybrides. Les interfaces actives sont des systèmes capables de fournir de l'énergie par le biais d'actionneurs (moteurs, vérins, ...). Elles sont généralement réactives et leur capacité à fournir de l'énergie permet la simulation de tout type d'environnement virtuel. Elles posent cependant des problèmes de stabilité qui sont contraignants car dangereux pour l'homme et pouvant détruire le rendu haptique. Les interfaces passives sont des systèmes qui ne fournissent pas d'énergie. Le retour d'effort est réalisé en dissipant les efforts fournis par l'opérateur (freins, ...) ou en réorientant le système à l'aide d'autres actionneurs. Elles sont intrinsèquement stable mais elles sont dans l'incapacité de restaurer de l'énergie ce qui, dans certaines configurations, rend le système incapable de simuler l'effort calculée par l'environnement virtuel. La combinaison des deux systèmes est alors une interface hybride.

Les actionneurs hybrides s'imposent comme une solution pour gagner en stabilité sur une grande plage de raideur i.e. ces actionneurs semblent être une solution à l'augmentation de l'impédance du système. La partie frein assure une grande impédance et une stabilité et la partie moteur permet de restituer de l'énergie au système lorsque c'est nécessaire. Le système conçu par Rossa et al. [4] est un actionneur hybride composé de deux freins magnéto-rhéologiques (MR) et d'un moteur (Figure 1). Les deux freins sont montés sur des roues libres elle-mêmes montées sur l'axe moteur et en opposition. La roue libre montée dans le sens horaire (ClockWise clutch) ne peut transmettre les efforts de son frein associé que si l'arbre moteur tourne dans le sens anti-horaire. A l'inverse, la roue libre montée dans le sens anti-horaire (CounterClockwise Clutch) ne transmet les efforts de son frein associé que si l'arbre moteur tourne dans le sens horaire. Ceci permet d'éviter de freiner l'arbre moteur lorsque le sens de rotation change et permet aussi de ne pas dissiper l'effort du moteur dans les freins.

Pour mieux comprendre le fonctionnement de l'actionneur, considérons une rotation dans le sens anti-horaire. La roue libre CW est donc enclenchée. Si le couple désiré (couple calculée par l'environnement virtuel) est dans le sens horaire alors le système fournit le couple moteur τ_m plus le couple frein τ_{CW} (Figure 2). Si le couple désiré est dans le sens anti-horaire i.e. dans le même sens que l'arbre moteur alors seul le moteur peut agir. De manière plus générale, si $signe(\dot{\theta}) \neq signe(\tau_h)$ (avec $\dot{\theta}$ la vitesse de rotation de l'arbre moteur et τ_h le couple désiré) alors le couple transmissible est $\tau_m + \tau_b$ (avec τ_m et τ_b respectivement le couple du moteur et du frein). Le couple maximal développable par le moteur est τ_{sat} et est 27.5 fois plus faible que celui développable par les freins. Le couple de saturation

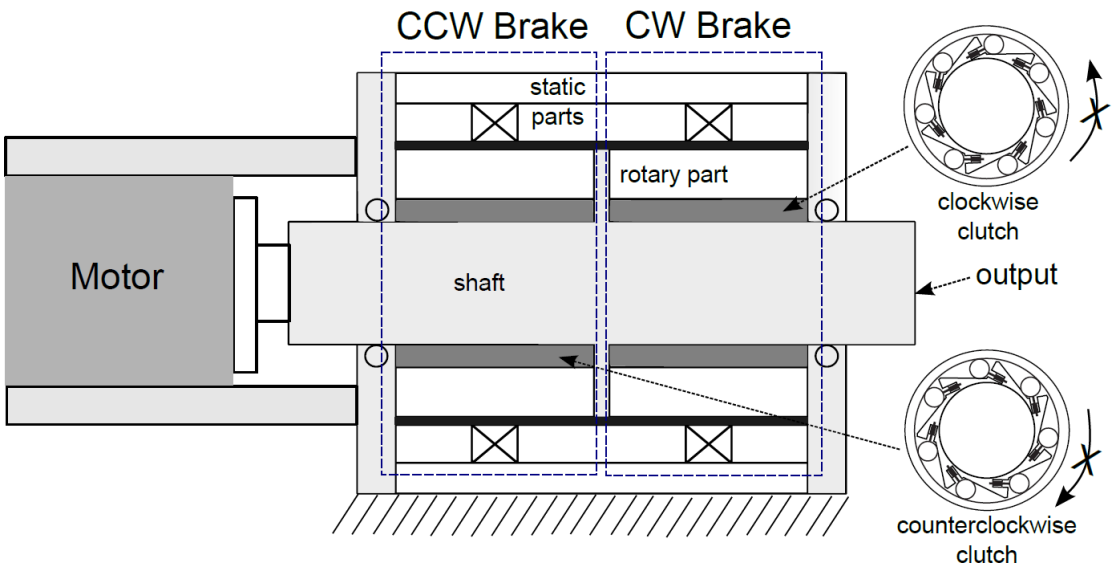


FIGURE 1 – Actionneur hybride avec des freins magnéto-rhéologiques. Les roues libres sont des pièces qui ne s'enclenchent que dans un sens de rotation, l'une dans le sens positif (CounterClockWise) et l'autre dans le sens négatif (ClockWise). Ainsi, les efforts des freins ne sont transmis que si ça roue libre associée est enclenchée. L'arbre moteur n'est donc plus freiné lorsque le sens de rotation change.

du moteur est de $0.2Nm$, donc le couple de saturation du frein est de $5.5Nm$. Le système produit des frottements secs de l'ordre de $30mNm$ et des frottements visqueux de l'ordre de $732\mu Nms$ pour une inertie de $418gcm^2$ et une puissance de $170W$.

Il est donc important pour ce système d'optimiser l'utilisation des freins.

L'étude faite ici a pour objet de considérer cet actionneur hybride dans une interface Multi-Degrés De Liberté (MDDL). Le but est de comprendre l'impact des freins dans un système MDDL d'autant plus qu'ils développent un effort 27.5 fois plus grand que les moteurs. Puis de créer une commande adéquate au système et qui ne demande aucun capteur d'effort. Dans un premier temps, nous parlerons brièvement des différentes interfaces haptiques où nous passerons en revue les différents types de système ainsi que leurs qualités et leurs limitations pour en ressortir les intérêts que peuvent susciter des systèmes hybrides. Ensuite, nous aborderons le cœur du problème lié au côté dissipatif des interfaces. La principale contrainte des freins vient de son incapacité à pouvoir fournir un effort de même direction que la vitesse de la l'arbre moteur et il est donc nécessaire de comprendre son influence dans un système MDDL. Des propositions d'amélioration déjà existantes sont expliquées. Dans le but de choisir notre type de système, ils nous faut mettre en place des critères de performance. Puis, une étude de comparaison pour réaliser un choix entre différents systèmes est présentée. Celle-ci est principalement basée sur l'optimisation de l'utilisation des freins. Enfin, deux systèmes sont simulés en vue de vérifier leur efficacité faces à différentes situations.

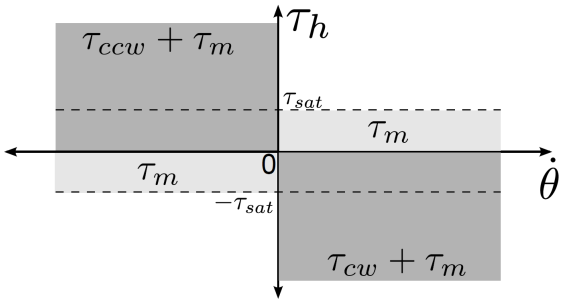


FIGURE 2 – Capacité de couple d'une interface frein-moteur en fonction de la vitesse d'interaction. $\dot{\theta}$ et τ_h correspondent respectivement à la vitesse angulaire de l'arbre moteur et au couple désiré (calculé par l'environnement virtuel). τ_m et τ_{sat} sont respectivement le couple moteur et le couple de saturation du moteur. τ_{CW} et τ_{CCW} sont respectivement les couples du frein horaire et anti-horaire. On note τ_b le couple frein transmis à l'arbre moteur (donc $\tau_b = \tau_{CW}$ ou $\tau_b = \tau_{CCW}$). Lorsque $\dot{\theta} \neq \tau_h$ alors le couple de l'actionneur est $\tau_m + \tau_b$, sinon il vaut τ_m.

2 Les interfaces haptiques

L'étude de l'actionneur hybride pour des systèmes MDDL nécessite la compréhension de système comportant les actionneurs qui le composent autrement dit, des actionneurs actifs ou passifs. Les interfaces haptiques sont l'implémentation d'actionneurs dans des systèmes mécaniques. Ces interfaces sont définis grâce à deux critères de performance. Il s'agit de :

- La transparence
- La stabilité

Une excellente transparence se traduit par un système capable de reproduire l'environnement virtuel. Pour un système mécanique : 1) il faut que l'inertie et les frottements ne soient pas perceptibles par l'opérateur. 2) il faut que son impédance puisse tendre vers l'infini. Un système idéal est alors un système ayant une impédance qui varie de 0 à l'infini. Une impédance nulle signifie que le mouvement est totalement libre, une impédance infinie peut se définir comme la simulation d'un objet indéformable.

La stabilité est fondamentale pour éviter des effets de "backslash" (oscillations importantes) dans l'effecteur ce qui est essentiel lorsqu'on ne veut pas transmettre d'effort parasite. D'un point de vue sécurité, de trop grandes oscillations peut mettre en danger l'opérateur. Ce phénomène intervient généralement lorsque la raideur du mur virtuelle est particulièrement grande.

2.1 Les interfaces actives

On appelle "interfaces actives" les interfaces haptiques capables de transmettre un effort en créant de l'énergie. Les actionneurs utilisés sont principalement des moteurs et des vérins mais d'autres systèmes peuvent être envisagés. Ils ont le grand avantage de pouvoir dissiper et restituer de l'énergie.

2.1.1 Limitations

Dans le cas de la simulation d'un mur virtuel modélisé par un ressort de raideur K, lorsque l'opérateur se déplace dans l'environnement et qu'il rencontre ce mur, une force proportionnelle au déplacement et à la raideur est commandée aux moteurs. Cependant, la position est échantillonnée. Cela signifie que les capteurs ne peuvent donner une valeur exact à tout instant, les mesures sont alors séparées par des pas de temps T et ont une erreur relative intrinsèque au capteur. Ainsi, du point de vue de l'ordinateur, le mouvement de l'opérateur peut se situer à l'instant t devant le mur, puis à l'instant $t + T$, dans le mur. Les moteurs exercent donc une force opposée à ce mouvement ce qui ramène l'utilisateur devant le mur. L'opérateur continuant son mouvement va rentrer à nouveau dans le mur et ainsi de suite entrainant alors des oscillations. Si l'opérateur lâche l'effecteur ou s'il entre profondément dans le mur, la force générée par les moteurs peut être telle qu'elle peut blesser l'utilisateur. Un système doit donc toujours respecter le critère de stabilité. La plupart des systèmes ont été mis au point pour respecter ce critère. Pour stabiliser leur système hybride Kwon et al. [5] définissent un mur virtuel fonction d'un ressort et d'un amortisseur. Adams et al. [6] quant à eux, recherchent une condition de stabilité absolue à leur système en regardant la matrice de transfert (appelée ici matrice d'admittance) entre les vitesses et les efforts imposés par l'opérateur et imposés par l'environnement virtuel à l'effecteur. Ils en déduisent ainsi la raideur et l'amortissement optimaux pour leur système 3DDL.

Colgate et al. [7] montrent qu'il y a un compromis entre la période d'échantillonnage, la raideur du mur virtuel et le coefficient d'amortissement du système. Le système 5-barres décrit par E. Bonneton [8] illustre cet effet. Pour une raideur virtuelle du mur supérieure à K=2000N/m, l'amplitude des oscillations provoquées par des rebonds successifs lors du suivit d'un mur augmente, le système est alors instable. Lorsque cette valeur est inférieure à 2000N/m, l'amplitude diminue en fonction du temps et le système se stabilise.

2.2 Les interfaces passives

On appelle "interfaces passives" les systèmes ne pouvant pas créer d'énergie. Elles sont donc intrinsèquement stable et sûre. On différencie deux types d'interface passive : 1) Les systèmes dissipatifs 2) les systèmes pilotés. Le premier type d'interface sont des systèmes munis de freins et/ou d'amortisseurs. Ainsi, la transmission de l'effort dans l'effecteur se fait par dissipation de l'énergie dans les freins [9] [10]. Ne créant pas d'énergie, les phénomènes de "backslash" sont inexistants dans les systèmes 1DDL. Le second type d'interface sont des systèmes principalement utilisés pour imposer une trajectoire à l'opérateur. Ce principe revient à décrire un système dont on augmente les possibilités de déplacement (i.e. augmenter le nombre de DDL) grâce à des actionneurs (système non holonome) ou à réduire les possibilités de déplacement en bloquant des actionneurs. Mécaniquement, cela revient à utiliser un système à nDDL dans un espace à $N > n$ dimensions. Un système non holonome a été proposé par Colgate et al. [11] dont les résultats montrent que le système est capable de suivre un mur courbe à l'aide d'un unique actionneur. Swanson et al. [12] propose de bloquer des liaisons pour réduire le nombre de DDL du système, celui-ci éprouve cependant des difficultés à simuler des objets de formes complexes. Les systèmes du 1er type sont mieux adaptés aux collisions mais posent des problèmes de suivi de trajectoire. Nous nous intéresserons aux systèmes ce type. A l'inverse, les systèmes du 2e type excellent dans la problématique du suivi de trajectoire mais sont inefficaces en ce qui concerne les collisions. Ils ont aussi le désavantage de ne pas avoir un mouvement libre total (impossibilité de faire un changement direction soudain).

Enfin, les freins ont un ratio couple/unité de volume et un ratio couple/puissance consommée plus important qu'un moteur ce qui explique l'intérêt qui leur est porté.

2.2.1 Limitations

L'interface étant uniquement dissipative, elle ne peut restaurer de l'énergie. Par exemple, un ressort virtuel simulé par un actionneur passif ne sera pas totalement simulé (voir Figure 3). En effet, lorsque l'opérateur comprime le ressort (1), une force proportionnelle Kx est calculée par l'environnement virtuel et est envoyée au frein (2). La force résistante F_h (la force désirée) est alors simulé par la dissipation d'énergie dans les freins. Si l'opérateur arrête de comprimer le ressort, il ne fournit plus d'énergie au système et le frein ne pouvant en créer, il n'y a pas de retour en position initiale.

Un autre phénomène est le "collage". On peut regarder ce problème en considérant le "modèle de Karnopp" qui traduit le phénomène de stick-slip (collage-glissement). Il se défini par l'équation 1.

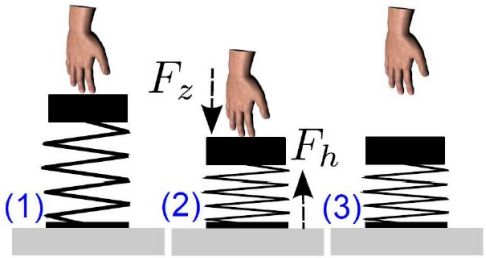


FIGURE 3 – Simulation d'un ressort virtuel par un actionneur dissipatif (dessin tiré de Rossa et al. [13]). En (1) l'opérateur comprime le ressort virtuel. En (2), l'environnement virtuel calcule l'effort F_h exercé par le ressort et l'envoie au frein. La force imposée par l'opérateur F_z est alors dissipée. En (3), L'opérateur ne fournit plus d'effort, le système dissipatif ne permet pas le retour du ressort à sa position initiale.

$$F_b = \begin{cases} -|F_h|\text{sign}(\dot{x}) & \text{if} \quad \dot{x} \neq 0 \\ -|F_h|\text{sign}(F_e) & \text{if} \quad \dot{x} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Où F_b est la force du frein, F_h est la force désirée, F_e est la force extérieure et $\dot{x}$ représente la vitesse de l'effecteur. Cette équation permet de donner un signe et une norme à la force F_b du frein. Lorsque que le système est en mouvement ($\dot{x} \neq 0$), F_b s'oppose alors à la vitesse et prend pour valeur celle de la force désirée F_h. Lorsque le système est à l'arrêt ($\dot{x} = 0$), le frein s'oppose aux forces extérieures appliquées à l'effecteur et prend la valeur de F_h. Considérons la simulation d'un mur virtuel (Figure 4), le frein applique une force opposée F_b proportionnelle à la raideur du mur (2). Si la vitesse devient nulle (l'opérateur n'avance plus), il n'y a plus de force extérieure et l'effecteur reste dans le mur (même principe que dans la Figure 3). Cependant, le frein reste actif et d'après l'équation 1, lorsque l'opérateur essaie de sortir du mur, le frein exerce une force opposée à son mouvement (3). Il doit alors exercer une force $F_z > F_h$ alors qu'il devrait en sortir aisément. L'utilisateur a l'impression de coller au mur.

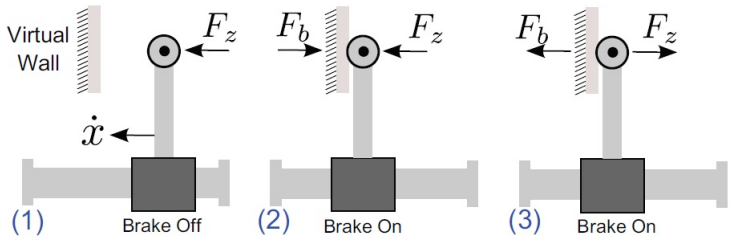


FIGURE 4 – Phénomène de collage (dessin tiré de Rossa et al. [13]). En (1), le mouvement est libre, on a alors la force $F_h = 0$ donc les freins sont désactivés. En (2), l'effecteur a une vitesse $\dot{x} \neq 0$, le frein exerce donc une force $F_b = F_h$, F_h étant l'effort calculé par l'environnement virtuel, de signe opposé à $\dot{x}$. En (3), Lorsque l'opérateur essaie de sortir du mur, $\dot{x} = 0$ et le frein s'oppose donc aux forces extérieures i.e. à l'effort F_z imposé par l'utilisateur. F_b s'oppose donc à la force opérateur. L'opérateur doit alors fournir $F_z > F_h$, le phénomène de "collage" apparait

2.2.2 Les interfaces passives MDDL

Une autre limitation des interfaces passives apparait uniquement dans les systèmes MDDL. Prenons l'exemple d'un manipulateur 2-barres. La Figure 5 montre un cas de déplacement de son effecteur le long d'un mur virtuel. Il est alors important de connaitre la direction et le sens des forces agissant sur le système. Ici, l'opérateur applique une force $\underline{F}_z$ à l'effecteur. Lorsque l'effecteur entre en contact avec le mur virtuel, on doit exercer une force $\underline{F}_h$ normal au mur. Il faut alors que l'effecteur reste tangent au mur et donc qu'il est une vitesse selon $\underline{\dot{x}}$. En décomposant cette vitesse dans les liaisons A et B (projection de $\underline{\dot{x}}$ dans l'espace articulaire), on trouve $\dot{\theta}_A$ et $\dot{\theta}_B$. Les freins sont utilisables si le signe des couples que cet effort introduit au niveau des liaisons sont opposés. En projetant F_h dans l'espace articulaire on trouve les couples τ_{h_A} et τ_{h_B}. On remarque alors que dans la liaison B, le couple τ_{h_B} nécessaire pour développer $\underline{F}_h$ et la vitesse angulaire $\dot{\theta}_B$ nécessaire pour obtenir la vitesse désirée $\underline{\dot{x}}$ sont de signe opposé. Couple et vitesse angulaire étant de signe opposé, il est donc possible d'utiliser le frein B. En revanche, le couple et la vitesse angulaire dans la liaison A sont de même signe, ce n'est donc pas possible d'utiliser le frein A. L'effort désiré est donc impossible à appliquer.

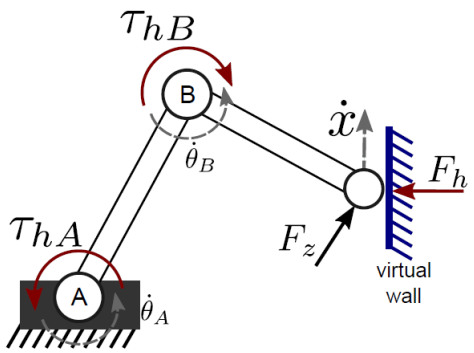


FIGURE 5 – Suivi d'un mur pour un système 2DDL (dessin tiré de Rossa et al. [4]). $\underline{F}_z$ et $\underline{\dot{x}}$ sont respectivement l'effort imposée par l'environnement virtuel et la vitesse désirée. (τ_{h_A}, τ_{h_b}) et ($\dot{\theta}_A$, $\dot{\theta}_B$) représentent respectivement la projection de la force $\underline{F}_z$ et de la vitesse $\underline{\dot{x}}$ dans l'espace articulaire (espace formée des liaisons A et B). Si l'opérateur fournit un effort $\underline{F}_z$, la simulation du mur nécessite alors un effort $\underline{F}_h$ normal au mur. Ce qui doit entrainer une vitesse $\underline{\dot{x}}$ tangente au mur. L'actionneur A ne peut pas utiliser son frein car le couple τ_{h_A} et la vitesse de rotation $\dot{\theta}_A$ ont le même signe. L'effort $\underline{F}_h$ n'est donc pas atteignable par les freins.

Cho et al. [14] ont développé une commande permettant d'approximer la force $\underline{F}_h$ désirée. Ceci va leur permettre de réduire le problème lié aux systèmes MDDL exprimé par la Figure 5. Ils considèrent l'angle entre la force désirée normale à la surface du mur et la force commandable la plus proche i.e. la force définie dans telle qu'elle minimise l'angle. Plus cet angle se rapproche de 0 plus l'approximation sera bonne, plus il est grand, plus l'approximation sera faible. Ils vont alors chercher un coefficient correcteur α tel que :

$$\alpha = -\frac{\underline{F}_z \underline{F}_h}{\underline{F}_c \underline{F}_h} \tag{2}$$

ou $\underline{F}_z$, $\underline{F}_h$ et $\underline{F}_c$ sont respectivement des vecteurs représentant la force introduite par l'utilisateur,

la force désirée normale au mur virtuel et la force contrôlée. A l'instant suivant, la commande du frein devient alors $\underline{F}_c^{'} = \alpha \underline{F}_c$. Avec cette commande, les auteurs montrent qu'ils peuvent réduire les phénomènes de stick-slip. Cho et al. introduisent une deuxième commande en vue de la même opération [15] mais cette fois ils basent leur commande sur l'énergie du système. Cette approche offre une solution au problème des systèmes MDDL mais elle nécessite un capteur de force pour connaître l'effort F_z. Or, ces capteurs sont chers et encombrants, c'est pourquoi une solution sans capteur de force a été recherchée.

D'autres commandes proposent de réduire le nombre de DDL du système en bloquant un des freins [9]. En bloquant successivement plusieurs freins, il est possible suivre une trajectoire définie ou d'approximer la force désirée. Cependant, si la succession des blocages est trop lente, cette commande risque de générer des vibrations au niveau de l'effecteur qui vont être perçue par l'opérateur.

2.3 Les interfaces hybrides

Les systèmes hybrides sont la combinaison de systèmes actifs et passifs. Les freins ne fonctionnent cependant que pour les efforts opposés aux mouvements, lorsque la force désirée à la même direction que la vitesse ils ne sont donc pas utilisables et c'est le moteur qui prend le relai. Tout l'enjeu de ce genre de système est donc de maximiser l'utilisation des freins et de basculer vers les moteurs lorsque que ce n'est plus possible [5]. L'un des principaux avantages des systèmes hybrides est l'obtention d'une large gamme d'impédance. Par rapport aux systèmes passifs, il permet en plus de pouvoir restituer de l'énergie grâce à la partie moteur de ses actionneurs.

Une première commande pour ce type d'actionneur est la compensation du frein par les moteurs [16]. Le frein est utilisé pour dissiper l'effort de l'utilisateur. Le moteur compense alors les non-linéarités liées à l'hystérésis et aux différents couples parasites notamment dues aux frottements et à l'inertie.

Une seconde méthode est l'utilisation du frein en vue de contrôler l'effort de sortie. Le frein est alors utilisé comme un amortisseur variable en vue d'augmenter la raideur du ressort. Chapuis et al. [17] contrôle le moteur en vitesse, les freins sont reliés à l'arbre moteur grâce à un différentiel ce qui va leur permettre de contrôler l'effort de sortie. Des roues libres sont aussi utilisées pour ne pourvoir utiliser les freins que selon un seul sens de rotation. Kwon et al. [5], eux, couplent l'axe moteur et l'axe frein par un accouplement souple.

Une solution proposée par Conti et al. [18] est composée d'un frein, d'un ressort et d'un moteur montés en série. L'effecteur est connecté au moteur et au ressort. A l'autre extrémité du ressort est connecté le frein. Le ressort peut alors stocker l'énergie fournit par l'opérateur et la restitué au moment voulu, de manière contrôlée. Le frein peut soit bloquer une extrémité du ressort, le ressort emmagasine alors l'énergie de l'opérateur, soit libéré l'extrémité du ressort pour vider l'énergie emmagasinée. Le ressort va créer une force opposée à celle de l'opérateur et qui pourra être compensée par le moteur. Cependant 1) Le ressort ne peut pas décharger d'énergie tant qu'il n'a pas été préalablement chargé. 2) Si la vitesse et la direction de la force du ressort sont opposées alors il faut décharger le ressort (en le libérant grâce au frein) et ajouter l'effort désiré.

L'actionneur hybride considéré est celui de Rossa et al. [4]. Il est composé d'un moteur et de deux

freins montés sur des roues libres elle-mêmes montées en opposition sur l'arbre moteur. Le moteur est un moteur à courant continu et les freins sont magnéto-rhéologiques. Les frottements secs sont de l'ordre de $0.03Nm$ et les frottements visqueux de l'ordre de $10^{-5}Nm/s$. Le système a une inertie de $418gcm^2$. Enfin, la puissance requise pour son fonctionnement vaut $170W$ pour un couple maximal frein+moteur de $5.5Nm$.

2.3.1 Problématiques des interfaces hybrides

Si on revient à l'exemple de la Figure 3, l'utilisateur comprime le ressort (1). L'environnement calcule l'effort F_h qui est envoyée à l'actionneur (2), la raideur du ressort est alors simulé. Lorsque l'opérateur arrête de comprimer le ressort (3), le moteur fournit l'effort F_h et le ressort revient à sa position initiale.

Reprenons l'exemple donné par la Figure 4. Nous avons vu que lorsque l'on sortait du mur, il fallait désactiver le frein pour éviter un phénomène de "collage". Dans le cas d'un actionneur hybride, lorsque l'opérateur essaie de sortir du mur, le moteur va repousser l'effecteur hors du mur avec une force F_m. Toujours d'après l'Equation 1, le frein génère une force $F_b = -F_m$. Cependant, le frein étant monté sur une roue libre, le frein ne peut dissiper aucun effort et l'effecteur sort du mur.

Enfin, reprenons la problématique des interfaces passives MDDL (Figure 5). Dans la liaison B, couple et vitesse angulaire sont de signe opposé, l'actionneur hybride peut donc pleinement utiliser le frein. En revanche, dans la liaison A, les signes étant de même sens, il n'est pas possible de d'utiliser le frein. Seul le moteur pourra générer le couple τ_{h_A}. La force F_h est donc atteignable.

Le système hybride proposé permet l'assouplissement de plusieurs contraintes. Il faut cependant rappeler que les moteurs utilisés ont une capacité de couple 27.5 fois inférieure à celle des freins et qu'ils saturent à $0.2Nm$. Cette dissymétrie entraine une limitation dans la commande. En effet, lorsqu'un seul des deux freins est atteignables, une disproportionnalité des efforts apparait entre les deux actionneurs. Dans la liaison A, un couple maximal de $0.2Nm$ peut être généré alors que dans la liaison B, un couple maximal de $5.7Nm$ peut être généré. A partir de ce constat, plusieurs possibilités sont disponibles :

- Soit $\tau_{h_A} \leq \tau_{sat}$ et $\tau_{h_B} \leq \tau_{sat}$ alors les moteurs peuvent fournir la force désirée F_h
- Soit $\tau_{h_A} \leq \tau_{sat}$ et $\tau_{h_B} \leq \tau_{sat} + \tau_b$ alors la moteur A et la combinaison frein-moteur en B permettent d'appliquer la force F_h
- Soit $\tau_{h_A} \geq \tau_{sat}$ et $\tau_{h_B} \leq \tau_{sat}$ ou $\tau_{h_A} \leq \tau_{sat}$ et $\tau_{h_B} \geq \tau_{sat} + \tau_b$ alors F_h n'est pas atteignable.

Dans le dernier cas, c'est la commande choisie qui définira le fonctionnement du système. Soit on cherche à garder une colinéarité entre F_h et l'effort atteignable soit on cherche à garder l'intensité de F_h. Dans les deux cas, la force F_h ne pourra pas être atteinte par les actionneurs.

En résumé, l'interface hybride semble un bon compromis entre les atouts des interfaces actives et ceux des interfaces passives. Cependant, au vue du problème que pose des freins dans les systèmes MDDL, il est nécessaire de comprendre et d'analyser des mécanismes pour maximiser l'utilisation des freins. Le système idéal devrait pouvoir exploiter les freins dans quelque soit la position de l'effecteur et la direction de l'effort imposée par l'opérateur i.e. que ses vitesses de rotation et ses couple aux articulations doivent être de signe opposé.

Il est évident qu'aucun système ne pourra utiliser les freins dans n'importe quelles conditions. En effet, il suffit que la vitesse à l'effecteur soit de même signe que la force désirée (par exemple lorsque l'opérateur recule après avoir compresser un ressort). Pour les fonctionnements en 1DDL, il n'est donc pas possible d'optimiser le système car il n'y a que deux configurations possibles : Soit l'effort et la vitesse sont opposés, soit ils sont de même signe. En revanche pour des fonctionnements d'ordre supérieur, il existe des cas qui diminuent l'efficacité des actionneurs, on peut alors créer un mécanisme pour améliorer le rendu haptique.

3 Maximisation des freins

L'exemple précédent montre que l'utilisation des freins dépend de la force opérateur et de la force désirée. Pour maximiser leurs utilisations, il y a deux possibilités :

1. Approximer la force désirée $\underline{F}_h$. Cela peut se faire grâce à une commande appropriée et connaissant l'effort imposé par l'utilisateur et/ou celui imposé par l'environnement virtuel.
2. Concevoir un système mieux adapté. En effet, le positionnement des freins, la configuration du mécanisme ou encore la position de l'effecteur sont des facteurs inhérents à l'emploi des freins.

Pour comprendre les solutions adaptées à ce type de problème, il est nécessaire d'introduire les notions d'ellipsoïde de manipulabilité et de zones de passivité.

L'idée ici va être de rechercher les zones dans l'espace opérationnel (espace formé dans le référentiel galiléen d'origine la position de l'effecteur) dans lesquelles la force désirée est de signe opposé à la vitesse de l'effecteur. Autrement dit, on recherche les zones pour lesquelles les freins peuvent être utilisés. Une étude proposée par VAN RHIJN [19] peut permettre l'identification de ces zones. Pour cet exemple, on se basera sur la Figure 6.

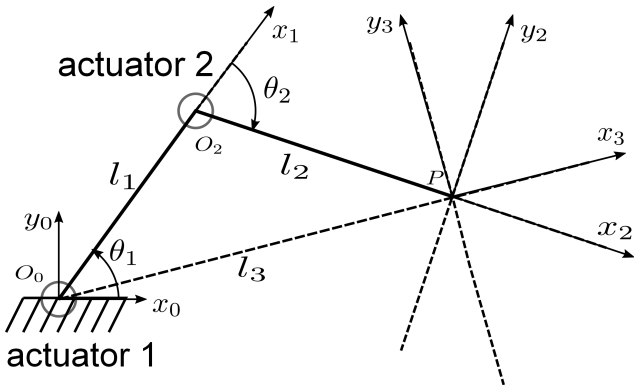


FIGURE 6 – Système 2-barres. Les scalaires l_1 et l_2 sont les constantes représentant la longueur des barres. La base principale est formée par $R_0 = (O_0, \underline{x}_0, \underline{y}_0)$. On définit un pivot en $O_1 \equiv O_0$ associé au repère $R_1 = (O_1, \underline{x}_1, \underline{y}_1)$ et de paramètre θ_1. Et on définit un second pivot en O_2 associé au repère $R_2 = (O_2, \underline{x}_2, \underline{y}_2)$ et de paramètre θ_2. P est le point représentant l'effecteur. On définit un troisième repère $R_3 = (P, \underline{x}_3, \underline{y}_3)$ tel que $l_3(\theta_1, \theta_2) = \underline{O_0P}$. Les actionneurs sont situés en O_1 et O_2.

Établissons tout d'abord les équations cinématiques de l'effecteur. La vitesse $\underline{V}^0(P) = \underline{\dot{x}}$ de l'effecteur calculée par rapport au référentiel $R_0 = (O_0, \underline{x}_0, \underline{y}_0)$ on peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \underline{V}^0(P) &= \underline{V}^1(P) + \underline{V}^0_1(P) \\ &= l_2\dot{\theta}_2\underline{y}_2 + l_3\dot{\theta}_1\underline{y}_3 \end{aligned} \tag{3}$$

Où $\underline{V}^1(P)$ est la vitesse relative du point P dans la base $R_1 = (O_1, \underline{x}_1, \underline{y}_1)$, $\underline{V}^0_1(P)$ est la vitesse d'entrainement du point P et $\dot{\theta}_1$ (respectivement $\dot{\theta}_2$) est la vitesse angulaire dans la liaison 1 (respectivement 2). Grâce à cette équation, on peut identifier les sens de rotation des pivots 1 et 2 en

fonction de la direction de la vitesse de l'effecteur. On remarque que $\underline{V}^0(P)$ est fonction des vecteurs $\underline{y}_2$ et $\underline{y}_3$. Regardant le signe de $\dot{\theta}_1$ et de $\dot{\theta}_2$ on peut définir 4 régions comme indiquées dans la Figure 7.

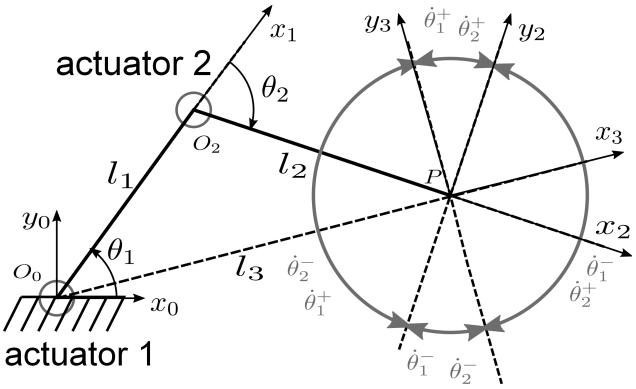


FIGURE 7 – Les différentes régions de vitesse d'un système 2-barres. Les exposants + et − indiquent le signe des vitesses angulaires. On définit ainsi 4 régions pour lesquelles les signes des vitesses angulaires sont identiques. Par convention, la région 1 sera la région dont le vecteur la bornant à le plus petit angle positif avec $\underline{x_0}$ (ici, y_2). Les régions 2,3 et 4 se retrouvent en balayant l'angle dans le sens positif.

On calcule ensuite les moments dans les pivots pour en connaitre leur direction. On suppose un effort $\underline{F}$ appliqué à l'effecteur et on pose les angles $\alpha_1 = (\underline{x}_3; \underline{F})$ et $\alpha_2 = (\underline{x}_2; \underline{F})$. Les moments $\underline{M}_{\underline{F}}(O_0)$ dans la liaison 1 et $\underline{M}_{\underline{F}}(O_2)$ dans la liaison 2 dus à la force $\underline{F}$ s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \underline{M}_{\underline{F}}(O_0) = \underline{O_1P} \wedge \underline{F} = L_3 \sin(\alpha_1) F \underline{z} \\ \underline{M}_{\underline{F}}(O_2) = \underline{O_2P} \wedge \underline{F} = L_2 \sin(\alpha_2) F \underline{z} \end{cases} \tag{4}$$

Le signe des couples étant fonction des angles α_1 et α_2 il est aisé d'identifier les 4 régions indiquées sur la Figure 8.

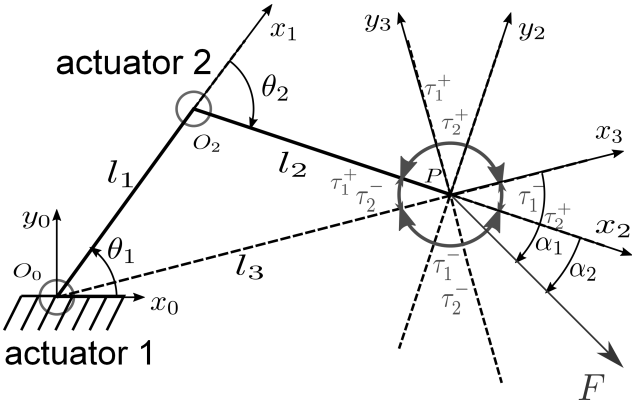


FIGURE 8 – Les différentes régions de couple d'un système 2-barres. Les exposants + et − indiquent le signe des couples. il est facile d'établir 4 différentes régions. On définit ainsi 4 régions pour lesquelles les signes des couples sont identiques. Par convention, la région 1 sera la région dont le vecteur la bornant à le plus petit angle positif avec $\underline{x_0}$ (ici, x_2). Les régions 2,3 et 4 se retrouvent en balayant l'angle dans le sens positif.

Pour le reste de l'article, on appellera "régions" les zones pour lesquelles il est possible d'identifier des vitesses angulaires (ou des couples) de signe constant. En considérant les signes des vitesses obtenus par l'équation 3 et en recherchant les signes opposés des couples donnés par 4, on peut finalement définir des zones dites de passivité (Figure 9) :

- La Zone Active (ZA) : Les vitesses angulaires et les couples sont de même signe. Les freins ne peuvent fournir de couple dans cette zone.
- La Zone Semi-Passive (ZSP) : Seul un couple à un signe opposé à la vitesse angulaire. Seulement un des deux freins peut fournir le couple désiré. L'effort ne peut être totalement établi.
- La Zone Passive (ZP) : Les vitesses angulaires et les couples sont de signe opposé. Les deux freins peuvent fournir du couple. C'est la zone contrôlable.

Il est important de remarquer que ces zones sont étroitement liées à la force $\underline{F}$.

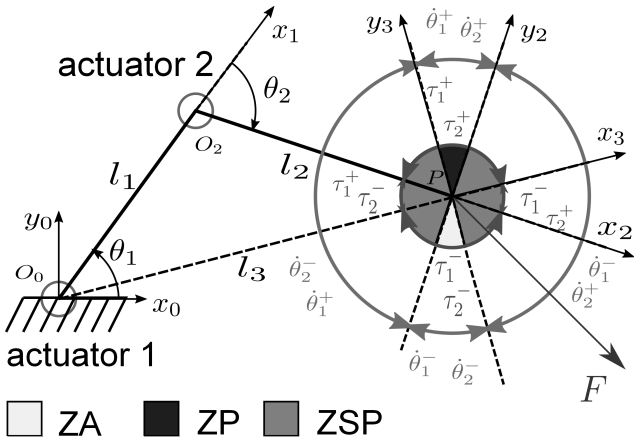


FIGURE 9 – Zones de passivité système 2-barres. Les exposants + et − indiquent le signe des couples et des vitesses angulaires. ZA, ZSP et ZP sont respectivement la Zone Active, les Zones Semi-Passives et la Zone Passive. Grâce à ces zones, on peut conclure que la force désirée $\underline{F}$ peut être simulée par des freins que si la vitesse à l'effecteur est dirigée vers la région $(P, +y_2, +y_3)$. Si la vitesse se situe dans la ZSP, alors un des deux actionneurs doit utiliser un moteur. Enfin, si la vitesse se situe dans la ZA, seuls les moteurs pourront être utilisés.

En conclusion, pour une vitesse donnée, la zone de passivité permet de savoir avec quel type d'actionneur (frein et/ou moteur)la force désirée peut être simulée. Autrement dit, dans notre exemple, les freins ne peuvent exercer l'effort $\underline{F}$ à l'effecteur que si sa vitesse $\underline{V}^0(P)$ est en direction de la zone passive. De manière générale, toutes forces désirées dirigées dans la région $(P, +x_2, -x_3)$ pourront être complètement simulées par des freins si la vitesse au bout de l'effecteur est dirigé dans la zone passive.

Cette méthode analytique simple est utile pour comprendre et trouver les possibilités d'actionnement des freins mais son utilisation semble plus délicate pour des systèmes plus complexes. En effet il n'est pas garanti que l'on puisse décomposer la vitesse de l'effecteur en vecteurs ne dépendant que d'une seule vitesse angulaire. De plus, dans ce contexte, les zones n'ont pas vraiment de sens car elles ne sont pas bornées ce qui veut dire qu'on considère que l'on peut exercer des vitesses et forces infinies. La théorie basée sur les ellipsoïdes de manipulabilité va nous permettre non seulement de

facilité les calculs numériques mais en plus borner les 3 zones de passivité.

Paul [20] montre qu'il existe toujours une relation entre la vitesse $\underline{v}$ à l'effecteur et les vitesses $\underline{\dot{q}}$ dans les liaisons. De même qu'il existe une relation entre la force à l'effecteur et les efforts dans les liaisons. La matrice qui les relie est appelée la matrice Jacobienne et est notée $\underline{\underline{J}}$. Elle dépend des caractéristiques du système telles que la longueur des barres, le nombre de liaison, etc... Finalement, ces relations s'écrivent :

$$\begin{cases} \underline{v} = \underline{\underline{J}}\ \underline{\dot{q}} \\ \underline{\tau} = \underline{\underline{J}}^T \underline{F} \end{cases} \tag{5}$$

Sachant que les actionneurs sont limités en terme de force et de vitesse et si on considère que chaque actionneur est identique, on peut directement normer $\underline{\dot{q}}$ et $\underline{\tau}$ tel que :

$$\begin{cases} \|\underline{\dot{q}}\| \leq 1 \\ \|\underline{\tau}\| \leq 1 \end{cases} \tag{6}$$

Physiquement, la $norme-2$ est une distribution homogène du couple et de la vitesse et est représentée par une hyper-sphère (un cercle dans le cas d'un système 2DDL) dans l'espace articulaire. La $norme-\infty$ définit l'effort maximale et la vitesse maximale développable par les actionneurs et est représenté par un hyper-cube (un carré dans le cas d'un système 2DDL) dans l'espace articulaire.

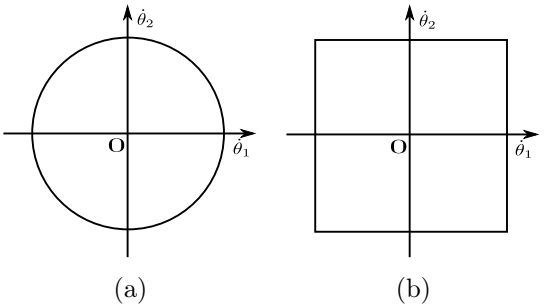


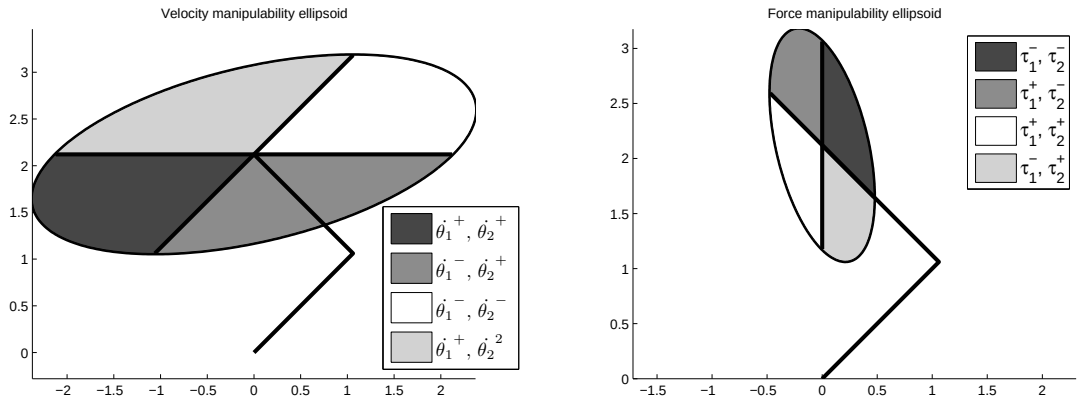
FIGURE 10 – La Figure 10a représente la distribution des vitesses selon la $norme-2$ dans l'espace articulaire et la Figure 10b représente celle en $norm-\infty$ dans l'espace articulaire (espace formé des paramètres $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$).

Mathématiquement, pour la vitesse $\underline{\dot{q}}$ (on peut le faire de manière analogique $\underline{\tau}$) cela s'écrit :

$$\begin{cases} \|\underline{\dot{q}}\|_2 = \underline{\dot{q}}_1^2 + \underline{\dot{q}}_2^2 + ... + \underline{\dot{q}}_n^2 \leq 1 \\ \|\underline{\dot{q}}\|_\infty = \max(|\underline{\dot{q}}_1|, |\underline{\dot{q}}_2|, ..., |\underline{\dot{q}}_n|) \leq 1 \end{cases} \tag{7}$$

En substituant l'équation 6 dans l'équation 7, on peut montrer en $norme-2$ qu'il en résulte à l'effecteur une hyper-ellipsoïde (une ellipse pour un système 2DDL) : c'est *l'ellipsoïde de manipulabilité* tel que Yoshikawa [21] l'a introduit. En $norme-\infty$ le résultat s'exprime sous la forme d'un hyper-rectangle (un rectangle pour un système 2DDL). Cela représente alors l'amplitude des vitesses ou des forces à l'effecteur i.e. dans l'espace opérationnel.

Pour un système 2DDL, Cho et al. [22] montre que l'on peut diviser le cercle définit par la $norme-2$ en 4 régions. Elles sont obtenues en mettant un actionneur à zéro et en choisissant un signe à l'autre. Ceci va permettre d'identifier les 4 régions dans l'ellipsoïde (voir Figure 11).



(a) Ellipsoïde des vitesses pour un système 2-barres. Si une vitesse est introduite dans une des régions, alors les freins seront utilisables si l'effort désiré se situe dans la région ayant des couples de signes opposés à cette vitesse dans la Figure 11b

(b) Ellipsoïde des forces pour un système 2-barres. Si une force est introduite dans une des régions, alors les freins seront utilisables si la vitesse actuelle se situe dans la région ayant des signes opposés aux couples, dans la Figure 11a

FIGURE 11 – Ellipsoïde de manipulabilité d'un système 2-barres calculé grâce au logiciel MATLAB.

A la différence de système 1DDL, il y a la présence de la ZSP ce qui nous as amené à penser que la ZP puisse être agrandie. Les solutions envisagées recherchent des mécanismes avec des configurations différentes et comprennent des redondances i.e. le nombre d'actionneurs dans le système est supérieur au nombre de DDL du système. Pour approfondir l'analyse, il est donc nécessaire d'expliquer les redondances.

4 Redondance

Pour savoir si un système est redondant ou non, il faut tout d'abord connaître son degré de mobilité. Pour un système plan, celui-ci est donné par l'équation 8. M est la mobilité, n est le nombre de corps rigides, j est le nombre de liaisons et enfin f_i est le nombre de degré de liberté par liaison.

$$M = 3(n - j) + \sum_{i=1}^{j} f_i \tag{8}$$

Si on prend l'exemple de la Figure 13a, le système est composé de deux bras soit $n = 2$ et de deux pivots soit $j = 2$ et $f_i = 1$. Le système a donc $M = 3(2 - 2) + \sum_{i=1}^{2} f_i = 2$ degrés de mobilité. Pour un système en chaine cinématique ouverte composé de j pivots, comme n et j sont toujours égaux, ce type système aura un nombre de degré de mobilité égal à j. Dans le cas du système 5-barres en chaine cinématique fermée (Figure 13b), on a $M = 3(4 - 5) + \sum_{i=1}^{5} f_i = 2$ degré de mobilité. Connaissant le nombre d'actionneurs n_m utilisés par le mécanisme, il y a redondance si :

$$n_m > M \tag{9}$$

4.1 Avantages et Inconvénients

La redondance implique une infinité de solution pouvant réaliser le déplacement de l'effecteur. Pour illustrer cette contrainte, prenons une redondance sur un système 1DDL (Figure 12). Pour déplacer l'effecteur, deux vérins contrôlables sont montés en série. On remarque tout de suite que l'on a trois possibilités pour déplacer l'effecteur, n'utiliser que le premier piston, n'utiliser que le second ou bien utiliser les deux. D'un point de vue énergétique, il est préférable de n'utiliser que le second piston car si on exploite le premier, il y a la masse du second vérin qui vient s'ajouter et il faut donc exercer un effort plus important.

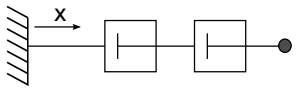


FIGURE 12 – Redondance d'un système mécanique à 1DDL. Les actionneurs sont des vérins montés en série et le point à l'extrémité du système correspond à l'effecteur

Si on considère que les vérins sont identiques, il est alors évident que ce système peut déplacer l'effecteur 2 fois plus loin que s'il n'y avait qu'un seul vérin. De plus, Reed et al. [23] montre que, dans le cas d'un système 5-barres en chaine cinématique fermée (Figure 13b), la redondance élargie la zone passive. Une étude [24] réalisée sur un système par câble et composé de freins montre très clairement l'agrandissement de la ZP que peut apporter la redondance.

Il est donc intéressant de prendre en compte d'éventuelle redondance dans notre système et d'approfondir les résultats obtenus par Reed et al.. Il faut cependant étudier non pas des systèmes passifs mais des systèmes hybrides.

5 Analyse de systèmes mécaniques

Les sections précédentes considèrent des actionneurs dans des mécanismes spécifiques. En vue d'optimiser les actionneurs hybrides dans un mécanisme, il faut pouvoir quantifier la performance de celui-ci. C'est l'objectif de cette section. La littérature offre de nombreux critères permettant de différencier les systèmes.

5.1 L'espace de travail

L'*espace de travail* représente l'espace dans laquelle l'effecteur peut se mouvoir. On distingue plusieurs types d'espace :

- L'espace constant : Il représente l'ensemble des positions que le système peut atteindre lorsque les paramètres sont fixes.
- L'espace atteignable ou espace maximal : Il représente l'ensemble des positions que l'effecteur peut atteindre avec au minimum un paramètre fixe.
- L'espace inclusif : Il représente l'ensemble des positions qui sont atteignables lorsque un ou plusieurs paramètres sont bornés.
- L'espace total : Il représente l'ensemble des positions que l'effecteur peut atteindre.

L'espace de travail défini donc l'espace dans lequelle il est possible de se déplacer.

5.2 Les singularités

Les singularités sont des positions d'un mécanisme pour lesquelles un déplacement dans une direction donnée est impossible. Donc, il est absolument nécessaire de les connaître car elles peuvent empêcher les actionneurs d'agir. Gosselin [25] propose une manière de retrouver ses positions algébriquement. Il se base sur la dégénérescence de la matrice jacobienne du manipulateur. L'étude écrite par Gosselin et Angeles [26] nous donne aussi quelques exemples de singularités pour quelques systèmes. Il faut dans un premier temps écrire la relation entre les paramètres d'entrée et les paramètres de sortie par l'équation suivante :

$$\underline{\underline{A}}\underline{\dot{x}} + \underline{\underline{B}}\underline{\dot{\theta}} = \underline{0} \tag{10}$$

où $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$ sont appelées matrices jacobiennes. $\underline{\dot{x}}$ et $\underline{\dot{\theta}}$ représente respectivement la vitesse de l'effecteur et le vecteur des vitesses angulaires. Il existe alors trois différents types de singularités :

- Les singularités de type 1. Elles apparaissent lorsque $\det(\underline{\underline{B}}) = 0$, autrement dit, il existe des entrées $\underline{\dot{\theta}} \neq 0$ tels que les sorties $\underline{\dot{x}} = 0$. Donc, certaines vitesses de l'effecteur ne peuvent pas être obtenues en générant des vitesses angulaires dans les liaisons. Ces singularités représentent les limites de l'espace de travail. Les vitesses $\underline{\dot{x}}$ qui ne sont pas réalisables sont celles qui s'orientent vers l'extérieur de l'espace de travail.
- Les singularités de type 2. Elles apparaissent lorsque $\det(\underline{\underline{A}}) = 0$, autrement dit, il existe des sorties $\underline{\dot{x}} \neq 0$ tels que les entrées $\underline{\dot{\theta}} = 0$. Il est donc possible qu'un mouvement en sortie puisse subvenir sans actionnement des paramètres d'entrée. De telles singularités impliquent qu'un mouvement introduit par l'opérateur ne peut pas être freiné ou stoppé par les actionneurs. Pour cette singularité, on parle aussi de mouvement indépendant ("*self motion*").

- Les singularités de type 3. Elles apparaissent quand les deux tenseurs s'annulent. C'est la réunion des deux premières singularités. Elle n'apparait que sur certains systèmes dont les caractéristiques (ex : longueur de barre) sont particulières.

5.3 Les critères de performances

Pour optimiser un système, la plupart des chercheurs utilisent des critères de performance [27] comme le critère de manipulabilité statique introduit Yoshikawa [21], le critère de manipulabilité dynamique [28], la dextérité [29] avec les indices de conditionnement global et local [30].

Le critère de manipulabilité statique traduit la capacité du système à pouvoir se mouvoir dans une position donnée. Une valeur constante implique un système est homogène i.e. qui peut se mouvoir de la même manière dans toutes les positions de l'espace de travail. Pour les systèmes redondants (voir la section 4), ce critère [21] se traduit par :

$$w = \sqrt{\det(\underline{\underline{J}}(\underline{\theta})\underline{\underline{J}}^T(\underline{\theta}))} \tag{11}$$

Lorsque le système est non redondant, le critère se réduit à l'équation :

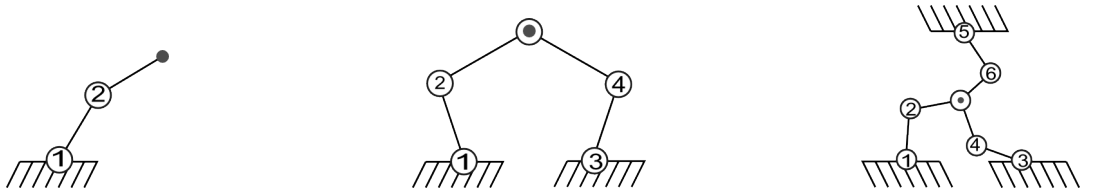
$$w = |\det(\underline{\underline{J}}(\underline{\theta}))| \tag{12}$$

Finalement, ce critère représente le volume de l'ellipsoïde de manipulabilité. Un volume maximale implique que l'ellipsoïde se rapproche d'une sphère, la répartition des forces et vitesses est alors homogène. Ce critère dépendant de l'échelle du système et dépendants des unités utilisées. Kim et al. [31] propose une manière simple de faire abstraction de ces facteurs en normalisant la "taille" de leurs systèmes et choisissant les unités du Système International. Ainsi, il est possible de comparer des systèmes différents. Enfin, O'Brien et al. [32] suggère que le critère de manipulabilité peut être amélioré en ajoutant des redondances au système. Grâce à ces notions, il est maintenant possible de chercher un mécanisme adapté aux actionneurs hybrides.

6 Les systèmes étudiés

6.1 Choix des systèmes

Comme présenté dans la partie précédente, la comparaison de différents systèmes est particulièrement complexe car les critères varient selon la taille et la géométrie. Il a donc été décidé de s'intéresser dans un premier temps à des systèmes sensiblement similaires. Les système 2-barres (Figure 13a), le système 5-barres (Figure 13b) et le système 6-barres (Figure 13c) ont déjà été étudiés mais dans l'optique d'utilisation d'actionneurs actifs.



(a) Système 2-barres (b) Système 5-barres (c) Système 6-barres

FIGURE 13 – Systèmes étudiés. Les cercles sont des pivots (rotations). Le point au centre des cercles représente l'effecteur. Les chiffres représentent les emplacements potentiels d'actionneur dans le système

6.2 Analyses existantes

Pour définir les longueurs des barres, on se base sur les études précédemment réalisées. Celles-ci cherchent à optimiser les performances de systèmes composés uniquement de moteurs. L'actionneur étudié ici étant hybride, il est envisagé de choisir la configuration du système pour laquelle l'utilisation des moteurs est optimisée.

Le système 2-barres est sans doute le système le plus étudié car c'est le mécanisme planaire le plus simple. Les critères de manipulabilité statique et dynamique ont été décrit par Yoshikawa [28]. L'espace de travail est immédiat, il correspond au disque dont le rayon vaut la somme des longueurs des deux bras. Dans le cas où un bras est plus grand que l'autre, il existe un espace non atteignable de la forme d'un disque centré sur le premier pivot. Les singularités apparaissent lorsque les deux bras sont alignés. Le système 5-barres est une référence parmi les systèmes et on retrouve de nombreuses analyses. Cervantes et al. [33] donnent une méthode de calcul pour trouver les singularités du système. Huang et al. [34] proposent une optimisation de l'espace de travail, rectangulaire, en prenant en compte les indices de dextérité local et global. Recherchant un rectangle dont le rapport largeur/hauteur est de 4, ils trouvent les paramètres nécessaires satisfaisant une dextérité minimale désirée. Reed et al. [23] montre que, dans le cas d'un système 5-barres, la redondance élargie la zone passive. Cependant, cela implique une augmentation de l'inertie dans le système. L'ensemble des singularités du système 6-barres (Figure 13c) ont été données dans [35]. Zhu et al. [36] propose une optimisation du système basé sur 3 critères de performance. La zone de travail étant peu exploitable, les longueurs de barres ont été modifiées. Butollo et Hannaford [37] propose un modèle pour optimiser la répartition des efforts dans l'espace de travail. Via leur algorithme, ils démontrent que les systèmes redondants

peuvent développer de plus grand effort que les systèmes non redondants. Kock et al. [38] propose une configuration dans laquelle la transmission d'effort est isotropique.

6.3 Méthode d'analyse de systèmes hybrides

Pour étudier les actionneurs hybrides, il faut étudier la partie moteur et la partie frein. La partie moteur pouvant être employée à tout moment et leurs ellipsoïdes étant rigoureusement les mêmes que celles des freins, les principales contraintes sur les efforts développables par l'actionneur viennent des freins. Dans le but de comparer différents systèmes entre eux il serait intéressant d'intégrer un critère.

Définition 1 (Angle de passivité) *L'angle de passivité ϱ est définit par les limites de la zone passive dans ellipsoïde de manipulabilité. On parle d'angle-force de passivité si on considère l'ellipsoïde-force et d'angle-vitesse de passivité si on parle de celui des vitesses.*

Il y a plusieurs remarques importantes à faire sur ce critère. Dans un premier temps, le frein ne pouvant que s'opposer à l'effort utilisateur, il est toujours compris entre 0 et π, π étant la meilleure valeur. En reprenant les figures 11a et 11b, on remarque que cet angle varie selon la région considérée et selon la position de l'effecteur. L'angle-force de passivité dépend de la vitesse à l'effecteur considérée. Il peut alors prendre deux valeurs distinctes. Dans une position singulière le nombre de région se réduit à 2 (perte d'un degré de liberté) et le critère prend alors les valeurs 0 ou π. Enfin, ce critère permet de constater qu'il est impossible d'augmenter la ZP. Considérant une vitesse donnée, un changement de position ou même un changement de géométrie du mécanisme ne pourra augmenter cet angle qu'au détriment d'une autre zone (ZSP ou ZA). Or, ces autres zones sont elles-mêmes des ZP si on considère d'autres vitesses.

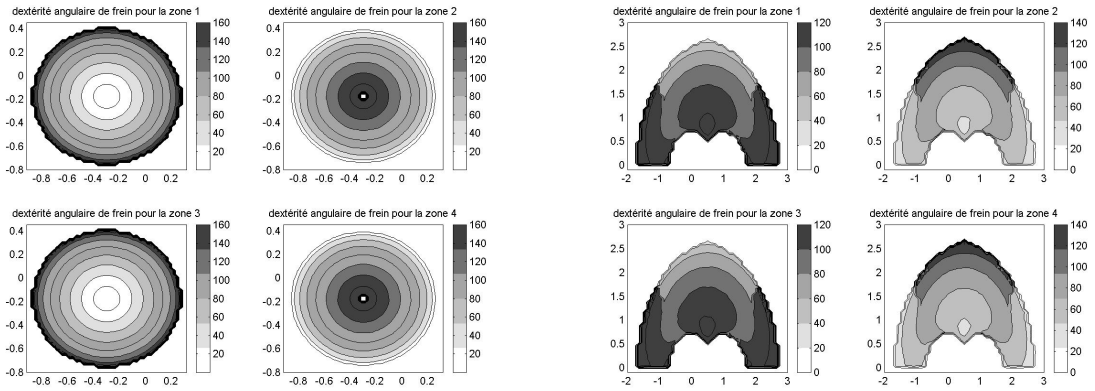
On sait que les ZP sont les zones telles que $signe(\tau_i) \neq signe(\dot{\theta}_i)$ où τ_i et $\dot{\theta}_i$ sont respectivement les couples et les vitesses angulaires dans les liaisons i. L'angle est donc défini par les vecteurs $\pm J_1^{-T}$ et $\pm J_2^{-T}$ selon le sens de la vitesse. Ainsi, la somme de ces 4 angles est toujours égale à 2π et sont toujours égaux deux à deux. On en déduit donc qu'augmenter un angle fera diminuer un autre de manière proportionnelle pour conserver une somme constante égale à 2π. Reed et al. [23] ont montré que la redondance permet d'élargir la zone passive, cette solution va donc permettre d'augmenter l'angle de passivité ϱ.

Avec ce critère, on perd une information importante que nous donne l'ellipsoïde : la force (ou vitesse) atteignable dans l'espace opérationnel. C'est pourquoi un autre critère a été mis en place.

Définition 2 (Volume relatif de la ZP) *Le volume relatif de la ZP χ est représenté par le rapport entre le volume de la zone passive et le volume total de l'ellipsoïde de manipulabilité.*

A l'instar du critère de Yoshikawa [21], le volume est considéré. Le volume relatif de la ZP représente la capacité qu'ont les freins à exercer une force dans la région considérée. Ce critère a été calculé numériquement. De même que pour l'angle de passivité, la somme des 4 ZP est toujours constante, ici, égale à 1. On remarque que ce critère sera toujours compris entre 0 et 0.5 (moitié de l'espace symétrique occupé), 0.5 étant la meilleure valeur. Il en résulte pour les trois système (2-barres, 5-barres et 6-barres) que cette valeur est toujours égale à 0.25. Tout comme l'angle de passivité, il est

impossible d'augmenter ce critère en modifiant le mécanisme. On en conclut que la redondance est une solution d'amélioration de systèmes hybrides.



(a) angle de passivité pour le système 2-barres (b) angle de passivité pour le système 5-barres

FIGURE 14 – Volume relatif de la ZP pour les systèmes 2-barres et 5-barres. Ici, les propriétés géométriques du système 5-barres sont celles exprimées dans [34]. Les actionneurs sont situés dans les emplacements 1 et 2 pour le système 2-barres (Figure 13a) et en 1 et 3 pour le système 5-barres (Figure 13b). On remarque que le centre du système 2-barres n'appartient pas à son espace de travail. Ceci est dû au fait de la différence de longueur des barres.

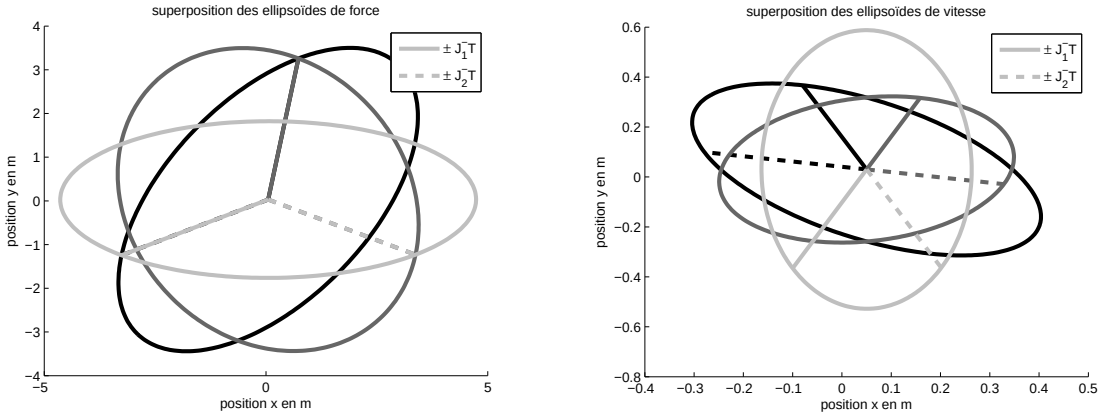
6.4 La redondance dans les systèmes passifs

La redondance permet d'augmenter les valeurs d'angle de passivité de volume relatif de la ZP. Pour considérer la redondance, deux possibilités. Soit écrire la matrice Jacobienne en fonction de tous les actionneurs, elle sera donc rectangulaire et il faudra utiliser une inverse de type Moore-Penrose pour résoudre le problème, soit considérer toutes les combinaisons de deux actionneurs ce qui revient à diviser le système redondant en plusieurs systèmes non redondants. C'est la seconde méthode qui a été choisie car elle permet directement d'utiliser la méthode décrite dans la section 3. Un système pouvant avoir plus de liaisons que d'actionneurs, seules les liaisons associées à un actionneur sont considérées dans l'analyse (On ne prend pas en compte les liaisons passives i.e. ne comportant pas d'actionneurs).

6.4.1 Recherche des zones

Dans la suite on considèrera toujours les régions de l'ellipsoïde des vitesses, et on recherchera les zones passives dans l'ellipsoïde des forces. Une fois que tous les signes sont retrouvés, il faut superposer les ellipsoïdes. Ce résultat est présenté dans la Figure 15. La Figure 15b montre les six régions possibles des ellipsoïdes-vitesse. Les régions sont limitées par les vecteurs colonnes J_1 et J_2 qui composent la matrice Jacobienne et par les ellipsoïdes-vitesse. La superposition des ellipsoïdes-force (Figure 15a) montre que dans ces 6 régions, le signe n'est pas toujours unique (voir exemple de la figure 16). En effet, considérant chacune des combinaisons de deux actionneurs, pour effectuer un même effort à l'effecteur, la combinaison des couples est différente en norme et en signe. Les vitesses,

elles, sont forcément toutes identiques car il n'est pas possible qu'une liaison puisse avoir deux vitesses différentes.



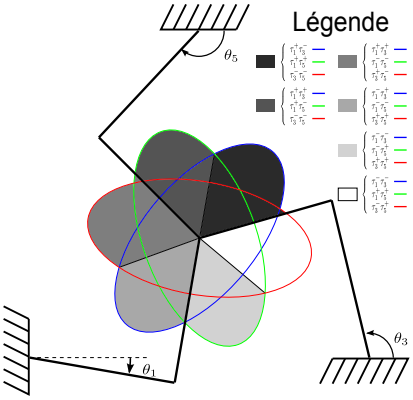
(a) superposition des ellipsoides-forces du système 6-barres. Les vecteurs J_1^{-T} et J_2^{-T} sont les vecteurs colonnes de la matrice Jacobienne transposée inverse $\underline{\underline{J}}^{-T}$.

(b) superposition des ellipsoides-vitesses du système 6-barres. Les vecteurs J_1 et J_2 sont les vecteurs colonnes de la matrice Jacobienne $\underline{\underline{J}}$. Les 6 régions sont directement visibles.

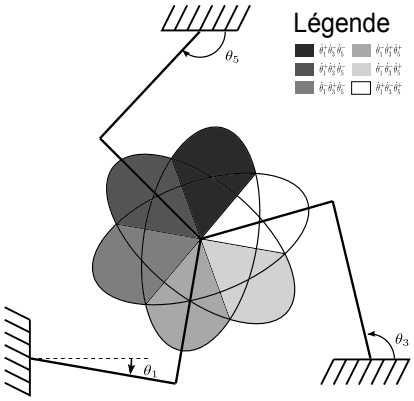
FIGURE 15 – Superposition des ellispoïdes du système 6-barres. Les actionneurs étant aux emplacements 1, 3 et 5 (Voir Figure 13c). Dans les deux figures, on distingue les 6 différentes régions. Pour la Figure 15a, il faut considérer les vecteurs opposés au vecteurs J_1^{-T} et J_2^{-T}.

Un exemple avec l'effecteur à la position (0 ;0) (centre de symétrie du système) permet une plus simple analyse. L'ensemble des signes des vitesses angulaires et des couples dans chacune des régions (Figures 16a et 16b) est recherché. Ensuite, pour exprimer les critères d'angle de passivité et de volume relatif de la ZP, on va considérer chacune des 6 régions des ellipses-vitesse et rechercher la zone passive correspondante dans les ellipses-force. Ce sont les figures 16c et 16d. Les ZP, les ZSP et les ZA sont ainsi toutes trouvées en parcourant chacune des régions. Il est important de noter que ZSP et la ZP ne doivent pas être considérées de la même façon. La ZP représente l'ensemble des efforts atteignables pour une région donnée alors que la ZSP représente les zones pour lesquelles il est seul un frein est utilisable. La force atteignable est donc une force dirigée selon un des vecteurs colonnes de la Jacobienne. La ZA quant à elle représente les efforts non atteignables par les freins. Même si les efforts sont non atteignables par les freins dans les ZSP et les ZA, il y a un grand intérêt à les représenter. Le système étant hybride, ces zones sont atteignables grâce aux moteurs qui cependant ne peuvent que exercer 1/25 des couples des freins.

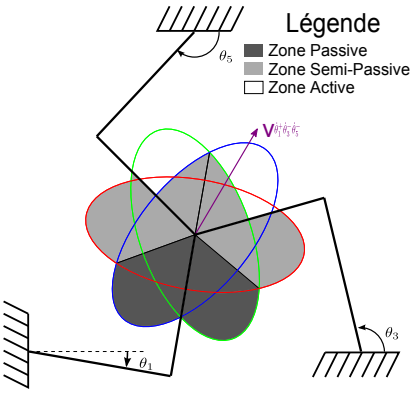
Ces régions sont fonctions de la Jacobienne. Or, la matrice Jacobienne étant intrinsèquement liée à la configuration du système, les vecteurs $\underline{J}_1^{-T}$ et $\underline{J}_2^{-T}$ varient en orientation et en norme dans l'espace de travail. De ce fait, la région considérée varie dans l'espace. Lors des calculs des critères, la région 1 a été définie comme la région dont le vecteur la bornant a le plus petit angle positif. La région suivante commence à partir du deuxième vecteur bornant la première région (orientation dans le sens positif). Ainsi, on sait toujours où se situe la première région cependant cela entraine des discontinuités dans les résultats. Une autre méthode envisageable est de toujours considérer la même région par rapport à une référence (par exemple, les régions à la position (0 ;0)). L'avantage de cette méthode est de



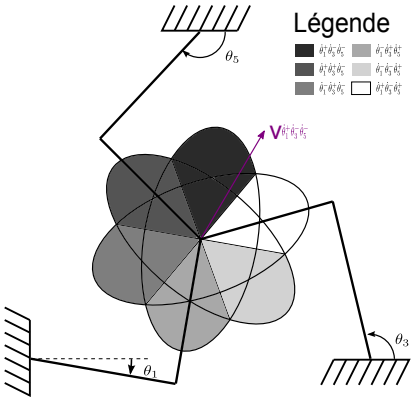
(a) Les 6 régions des ellipsoïdes-forces du système 6-barres. La région permet de connaître les signes des couples lorsque les actionneurs sont pris deux à deux. La force atteignable est représentée par l'ellipse de couleur associée.



(b) Les 6 régions des ellipsoïdes-vitesses du système 6-barres. Contrairement aux ellipsoïdes-forces il n'y a qu'une possibilité de vitesse angulaire pour chaque direction de vitesse



(c) Zones de passivités pour une vitesse donnée. On remarque assez nettement que l'angle de passivité a été améliorée



(d) Représentation d'une vitesse quelconque. Suivant sa direction, on peut déduire les vitesses angulaires et donc retrouver les zones de passivité associées

FIGURE 16 – Les 6 régions des ellipsoïdes du système 6-barres avec l'effecteur au centre du système (position (0 ;0)). Ces régions sont toujours définies à partir des vecteurs $\underline{J}_1^{-T}$ et $\underline{J}_2^{-T}$ pour l'ellipsoïde-force et $\underline{J}_1$ et $\underline{J}_2$ pour l'ellipsoïde-vitesse. Les actionneurs étant aux emplacements 1, 3 et 5 (Voir Figure 13c). Les signes des couples et vitesses angulaires dans l'espace opérationnel sont notés en légende. Il ne faut surtout pas considérer la Zone Semi-Passive comme la Zone Passive. En effet, la Zone Passive représente les efforts atteignables par les freins alors que la Zone Semi-Passive représente la zone pour laquelle seul un frein peut être utilisé, les efforts atteignables sont donc les efforts ayant la direction des $\underline{J}_1^{-T}$ et $\underline{J}_2^{-T}$ associés à ce frein

connaitre le signe des paramètres pour chaque région et à chaque position.

6.4.2 Méthode de calcul

Le calcul des critères a été effectué de la manière suivante. L'angle est le plus facile a calculé. Il suffit de connaître les deux vecteurs bornant la ZP, or, ces deux vecteurs sont forcément ceux de la matrice Jacobienne transposée inverse $\underline{\underline{J}}^{-T}$. Le second critère dépend fortement du nombre de points choisi pour tracer les ellipses. Le calcul analytique de l'aire de la superposition de plusieurs ellipses est envisageable mais étant mathématiquement complexe, le calcul a été fait numériquement. L'ensemble de la méthode est décrite dans l'annexe B.

6.5 Les critères de passivité dans les systèmes étudiés

Les prochaines données donnent les critères d'angle de passivité et de volume relatif de la ZP dans l'espace de travail de chacun des systèmes. Les systèmes étudiés présentent les caractéristiques décrites dans le tableau 1.

Système	2-barres	5-barres	6-barres
l_1	1.5m	1m	0.675m
l_2	1.5m	1.7m	0.475m
distance d entre 2 pivots impaires (Figure 13)		0.99m	0.606m

Table 1 – Paramètres des différents systèmes étudiés

Les résultats confortent les attentes faites sur la redondance. On remarque que les critères d'angle de passivité et de volume relatif de la ZP présentent de meilleurs résultats par rapport aux systèmes non redondants. Un point important à noter est que la redondance ne diminue jamais le critère de volume relatif de la ZP. Autrement dit, soit S_n un système avec n redondances alors $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $\varrho(S_n) > \varrho(S_0)$ et $\chi(S_n) > \chi(S_0)$. En effet, on remarque que la valeur la plus faible atteignable est toujours de 0.25 (La valeur passe de 0.25 à 0 pour des positions de l'effecteur en-dehors de l'espace de travail). Puisque la ZP d'une ellipse traduit un volume relatif de la ZP égale à 0.25 alors la superposition de n ellipses déterminera un critère au moins égal à 0.25. En revanche, il est difficile de dire $\varrho(S_{n+1}) > \varrho(S_n)$ et $\chi(S_{n+1}) > \chi(S_n)$. Il faut comparer pour selon deux systèmes redondants dont l'un contient plus d'actionneurs que l'autre. La majeure différence avec un système non redondant est la variation du volume relatif de la ZP avec la position. On retrouve cependant une valeur constante à travers l'espace de travail en faisant la moyenne des critères de chaque zone à une position donnée.

Les résultats présentent des discontinuités significatives. Ceci est principalement du à la méthode de calcul (voir 6.4.1).

6.5.1 Réflexion sur le volume relatif de la ZP

La redondance a permis de très nettement augmenter l'utilisation de freins. Toutes les régions du système 6-barres dépasse un volume relatif de 0.4 (Figure 20) pour certaines parties de l'espace de travail soit quasiment le maximum atteignable. Le système 5-barres quant à lui admet une région

'atteignant pas 0.4 (Figure 18) même avec 4 actionneurs (Figure 19). Comme l'a intuité Hirata [24], les résultats suggèrent qu'un effecteur situé à l'intérieur du polygone convexe formé par les actionneurs présente un meilleur élargissement de la zone d'utilisation des freins. En effet, bien que 4 actionneurs soient présents sur le système 5-barres, celui-ci n'atteint pas les 0.45 du 6-barres. La position des actionneurs au sein du système est donc un facteur primordial à l'utilisation des freins. De manière globale, le système 6-barres est plus performant, du point de ce critère, que le système 5-barres. Il est encore possible d'optimiser ces systèmes en recherchant des configurations pour lesquelles le volume relatif de la ZP reste homogène à travers toutes les régions et dans l'espace de travail.

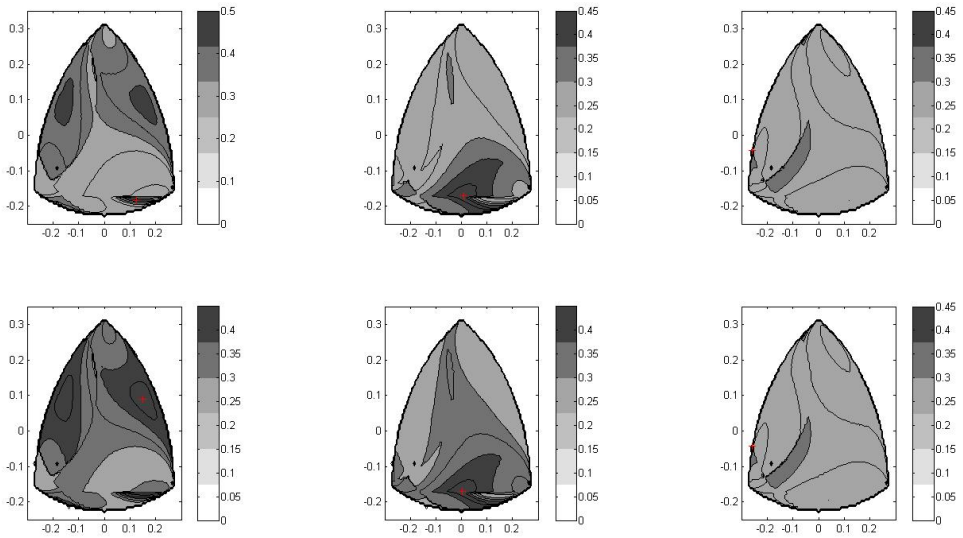


FIGURE 17 – Volume relatif de la ZP du système 6-barres pour 3 actionneurs. Les actionneurs sont situés aux emplacements 1, 3 et 5 (voir Figure 13c). L'abscisse correspond à la position en x (m) et l'ordonnée à la position en y (m). Le plus correspond à la valeur maximale atteinte. Chacun des graphes correspond au volume relatif de la ZP selon une des 6 régions considérées.

6.5.2 Réflexion sur l'angle de passivité

Au même titre que les systèmes non redondants, la somme des angles de chaque zone à une position donnée est constante. En faisant le même raisonnement que dans la section 6.3 il est possible de montrer que cette somme est égale 4π pour un système à 3 actionneurs et 6π pour un système à 4 actionneurs. De manière plus générale, on conjecture que pour un système 2DDL et n redondances alors la somme des critères d'angle de passivité est toujours égale à $2(n+1)\pi$.

6.5.3 Zoom sur un point optimal d'une zone

Certains points dans l'espace de travail sont optimaux car ils présentent des critères maximaux pour les mêmes régions considérées. La figure 23 montre la forme que prend les ellipsoïdes-force pour ces points. La position définie ainsi est une position proche d'une singularité. Une zone se rapprochant

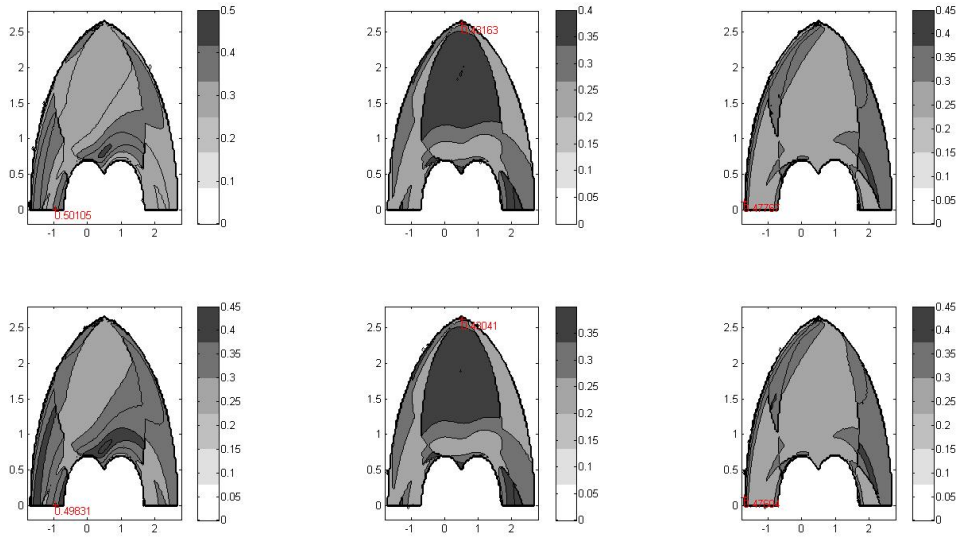


FIGURE 18 – Volume relatif de la ZP du système 5-barres pour 3 actionneurs. Les actionneurs sont situés aux emplacements 1, 2 et 3 (voir Figure 13b). L'abscisse correspond à la position en x (m) et l'ordonnée à la position en y (m). Le plus correspond à la valeur maximale atteinte. Chacun des graphes correspond au volume relatif de la ZP selon une des 6 régions considérées.

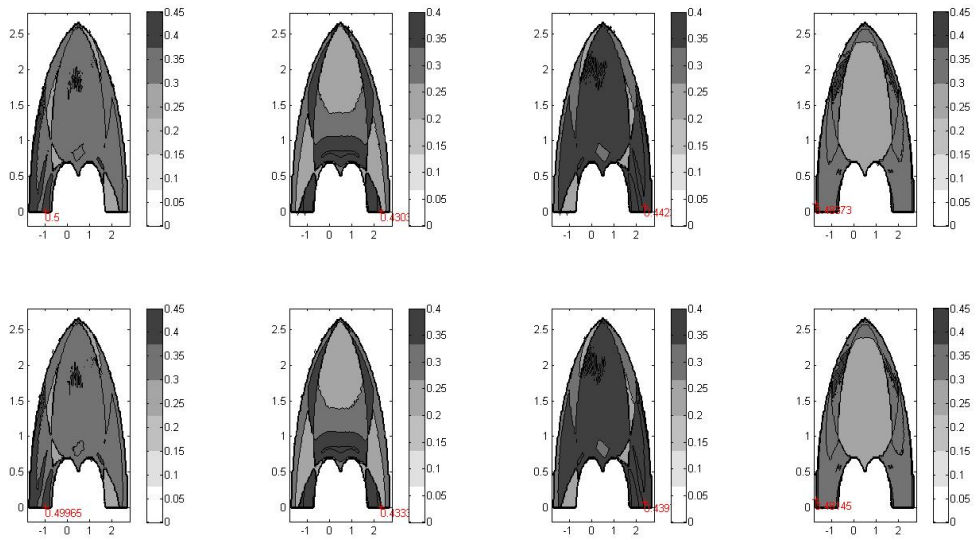


FIGURE 19 – Volume relatif de la ZP du système 5-barres pour 4 actionneurs. Les actionneurs sont situés aux emplacements 1, 2, 3 et 4 (voir Figure 13b). L'abscisse correspond à la position en x (m) et l'ordonnée à la position en y (m). Le plus correspond à la valeur maximale atteinte. Chacun des graphes correspond au volume relatif de la ZP selon une des 8 régions considérées.

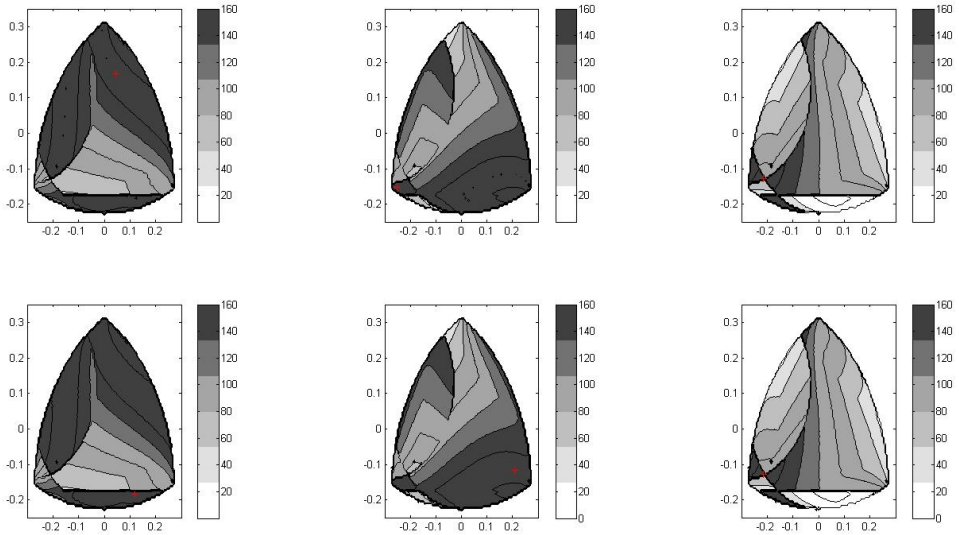


FIGURE 20 – Angle de passivité du système 6-barres pour 3 actionneurs. Les actionneurs sont situés aux emplacements 1, 3 et 5 (voir Figure 13c). L'abscisse correspond à la position en x (m) et l'ordonnée à la position en y (m). Le plus correspond à la valeur maximale atteinte. Chacun des graphes correspond à l'angle de passivité selon une des 6 régions considérées.

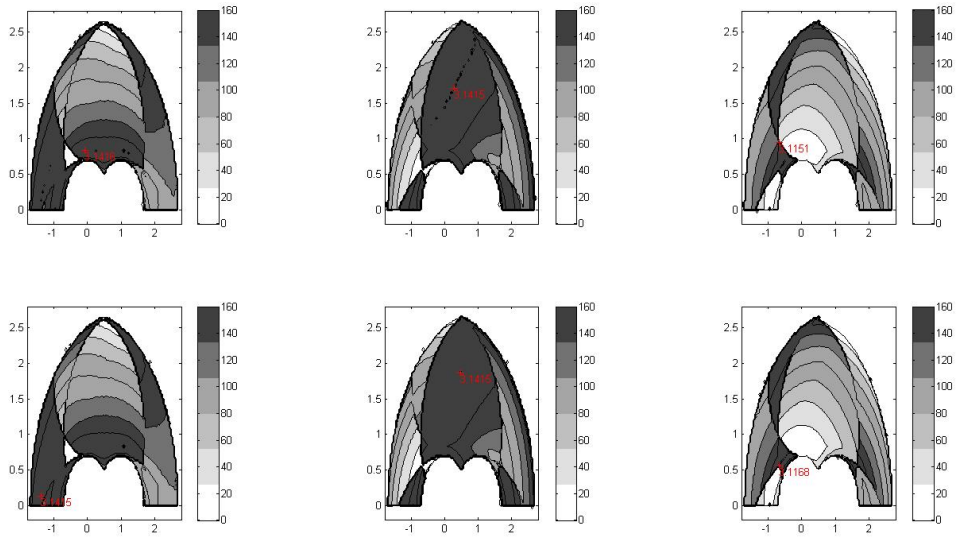


FIGURE 21 – Angle de passivité du système 5-barres pour 3 actionneurs. Les actionneurs sont situés aux emplacements 1, 2 et 3 (voir Figure 13b). L'abscisse correspond à la position en x (m) et l'ordonnée à la position en y (m). Le plus correspond à la valeur maximale atteinte. Chacun des graphes correspond à l'angle de passivité selon une des 6 régions considérées.

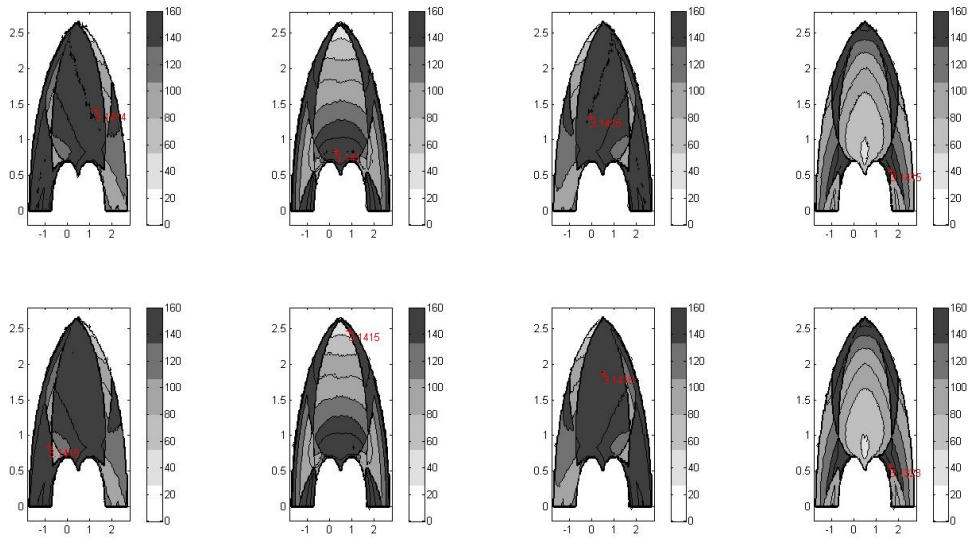


FIGURE 22 – Angle de passivité du système 5-barres pour 4 actionneurs. Les actionneurs sont situés aux emplacements 1, 2, 3 et 4 (voir Figure 13b). L'abscisse correspond à la position en x (m) et l'ordonnée à la position en y (m). Le plus correspond à la valeur maximale atteinte. Chacun des graphes correspond à l'angle de passivité selon une des 8 régions considérées.

d'un critère maximum (0.5 ou π) entraine les autres zones à se rapprocher d'un critère minimal (0.25 ou 0). Proche des singularités, il est donc important de définir des objets virtuels favorisant la zone optimale.

6.5.4 Conclusion de l'analyse

Dans un premier temps, en se basant sur cette analyse, il est constaté que le système de type 6-barres est plus performant que les deux autres. La redondance permet bien d'augmenter les ZP des systèmes, et donc, les systèmes comprenant des actionneurs passifs optimisent l'utilisation des freins lorsqu'il y a plus de freins que de DDL. Le critère de volume relatif de la ZP du système 6-barres atteint des valeurs plus grandes que dans les autres systèmes, on en conclut donc que le mécanisme agit aussi sur la performance des freins. On conjecture aussi qu'un effecteur situé à l'intérieur du polygone convexe formé par les actionneurs présente un meilleur élargissement de la zone d'utilisation des freins (cela est aussi montré dans [24]). L'angle de passivité donne quant à lui une information sur l'ensemble des murs virtuels qui peuvent être simulés par le systèmes. Il est donc important que l'environnement virtuel n'impose pas d'effort dans les régions pour lesquelles l'angle de passivité est faible.

Les ellipsoïdes de manipulabilité décrit par la Figure 16 sont valables pour les freins comme pour les moteurs. Si on considère l'actionneur hybride alors les ellipsoïdes associés aux moteurs sont 27.5 fois plus petit que ceux associés aux freins. On remarque qu'il y a des direction pour lesquelles l'effort transmit par les actionneurs est plus grand, ce sont les efforts dirigés selon le grand axe des ellipsoïdes.

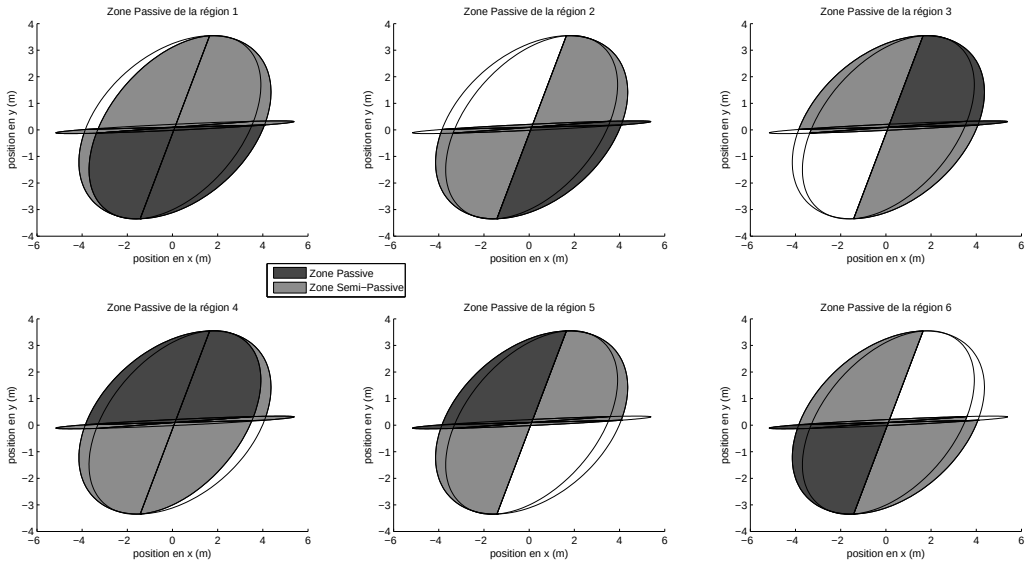


FIGURE 23 – Superposition des ellipsoïdes-force au point optimal (0.11,0.1). Les trois ellipsoïdes sont quasi-identiques ce qui se traduit par position de l'effecteur proche d'une singularité. Cette position permet cependant à l'angle de passivité d'atteindre une valeur de π pour la région 1 et 4.

D'un point vue de la commande, il y a donc une combinaison d'actionneur pouvant transmettre de plus grands efforts que d'autres. Cela est particulièrement intéressant pour la partie moteur qui ne peut fournit d'effort aussi grand que les freins. Lorsque les freins sont indisponibles, on peut choisir une combinaison de moteurs qui permet donc le plus d'effort à l'effecteur. Lorsque la force imposée par l'environnement virtuel est dirigée dans une ZP, les moteurs utilisés sont ceux associés aux freins qui sont utilisables.

En résumé, le système privilégié pour des actionneurs hybrides est le système 6-barres. La commande associée se traduit comme suit. Lorsque l'effort imposée par l'environnement virtuel se situe dans une ZA, seuls les moteurs agissent. On cherche alors la combinaison de moteurs pour laquelle on peut transmettre le plus grand effort à l'effecteur. Si l'effort imposé se situe dans une ZP, on utilise la combinaison d'actionneur pour laquelle les freins sont utilisables. Enfin, dans le cas d'une ZSP, un seul frein étant exploitable, le choix s'est porté sur la combinaison frein-moteur ou moteur-moteur qui permet de garder la même direction d'effort et ayant la norme la plus proche que l'effort imposé. De manière générale, si l'effort imposé dépasse les capacités de moteur ou de frein, on cherchera à garder une direction d'effort.

7 Simulation de systèmes hybrides

En vue de tester la commande, il est intéressant de simuler les mécanismes. La simulation (Voir Figure 24) comprenant des parties très distinctes, elles ont été séparées en plusieurs sous-systèmes.

7.1 Paramètres et ordres de grandeur

paramètre	valeur
l_1	0.303m
l_2	0.27m
densité linéique	$0.05kg/m$
Frottements de Coulomb τ_c	$0.03Nm$
Frottements visqueux b	$10^{-5}Nm/s$ (roulements à billes)
Raideur du mur virtuel K	$1500N/m$

TABLE 2 – Les paramètres de la simulation

7.2 Le modèle dynamique

Le modèle dynamique associé au système 5-barres et au système 6-barres est basé sur [39]. Le modèle des deux systèmes est alors :

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}} & -\underline{\underline{A}}^T \\ \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\ddot{q}} \\ \underline{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Q} \\ \underline{\underline{A}}\,\underline{\dot{q}} \end{bmatrix} \tag{13}$$

Où $\underline{\underline{M}} \in \Re^{n*n}$ est la matrice des masses, $\underline{\underline{A}} \in \Re^{m*n}$ est la matrice des contraintes, $q \in \Re^{n*1}$ le vecteur des paramètres, $Q \in \Re^{n*1}$ le vecteur des forces associées à chaque paramètre. Le modèle utilisé ici comprend $n = 10$ paramètres et $m = 8$ équations de contrainte 6-barres.

$$\begin{aligned} q_1 &= [x_e\ y_e\ \theta_1\ \theta_2\ x_2\ y_2\ \theta_3\ \theta_4\ x_4\ y_4]^T \\ q_2 &= [x_e\ y_e\ \theta_1\ \theta_2\ x_2\ y_2\ \theta_3\ \theta_4\ x_4\ y_4\ \theta_5\ \theta_6\ x_6\ y_6]^T \end{aligned}$$

Où $[x_e\ y_e]^T$ représente les coordonnées de l'effecteur dans le repère galiléen, $[x_{2p}\ y_{2p}]^T$ représentent les coordonnées du centre d'inertie des barres rattachées à l'effecteur dans le repère galiléen. θ_i sont les paramètres angulaires des liaisons pivots i (voir Figure 13).

7.3 L'environnement virtuel

L'environnement virtuel (V.E.) reçoit la position de l'effecteur et renvoie l'effort désiré $\underline{F}_h$. Il permet donc de simuler un objet virtuel préalablement défini. Dans le cas étudié ici, $\underline{F}_h = Kx$ où x représente la profondeur de pénétration dans le mur.

7.4 La matrice Jacobienne transposée

C'est celle définit dans la section 5. Elle permet le passage de l'effort dans l'espace opérationnel aux efforts dans l'espace articulaire.

7.5 Le contrôleur

Le contrôleur a pour objectif de répartir les efforts à travers tous les actionneurs. Toutes les ellipsoïdes ayant été analysées par deux actionneurs, on ne servira que deux actionneurs simultanément. Le contrôleur fonctionne comme ceci. Les capteurs de vitesses nous donnent les vitesses dans les liaisons. On peut donc en déduire la région dans laquelle on se trouve. L'environnement virtuel nous donne la force désirée, on peut donc savoir si elle se situe dans une ZP. Si les freins ne sont pas utilisables mais qu'une force créée par l'environnement virtuel existe, les deux moteurs associés aux deux liaisons dont les efforts sont les plus importants sont choisis. Lorsqu'au moins deux freins sont utilisables, les moteurs sont ceux associés à ces deux freins. Il a été décidé de privilégier la direction de la force devant son intensité i.e. si la force désirée n'est pas atteignable, une force de même direction et même sens est commandée. Ce cas apparaît lorsque :

- Seuls les moteurs sont utilisables et leur couple de saturation dépassé
- Seul un frein est utilisable
- La force désirée est plus importante que la force atteignable par la somme des freins et des moteurs
- Une dégénérescence de la matrice Jacobienne survient (singularité) provoquant l'inhibition d'un ou plusieurs actionneurs

Le contrôleur peut alors envoyer les efforts aux moteurs et aux freins.

7.6 Le modèle moteur

Le modèle utilisé est simple. Le couple moteur de sortie correspond au couple envoyé à celui-ce par le contrôleur. $\tau_m = \tau_{h_m}$, avec τ_m le couple de sortie du moteur et τ_{h_m} le couple commandé par le contrôleur.

7.7 Le modèle frein

La force imposée par l'utilisatrice est envoyé directement dans le modèle de frein. Cette force n'est aucunement mesurée (pas de capteur de force), elle donc totalement inconnue. En revanche, elle est nécessaire pour la simulation. En effet, si on fixe l'effort développé par le frein à l'effort désiré et que sa norme est plus grande que celle de l'effort utilisateur, celui-ci peut agir comme un système actif, ce qui n'est pas réaliste. Pour empêcher ce phénomène, l'effort frein est séparé en deux parties telles que :

$$\tau_{h_b} = \tau_t + b\dot{\theta} \tag{14}$$

Dans cette équation, τ_{h_b} représente l'effort désiré, $\tau_t = \tau_z - \tau_m$ i.e. le couple utilisateur moins le couple moteur et $b\dot{\theta}$ un frottement visqueux dépendant de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$. C'est cette dernière

partie qui caractérise la partie dissipative du frein. Comme le couple de freinage n'est pas dépendant de la vitesse mais seulement de son signe, b varie pour égaliser l'équation. Or, faire varier b reviendrait au problème précédent. On remarque que plus la vitesse est faible plus b augmente et tend vers l'infini. Il faut donc le fixer à l'infini et une valeur de $b = 10^3 Nm$ a été définie.

7.8 Les lois de frottements

Les frottements sont essentiels à la simulation. Dans un premier temps, ils permettent à la simulation de converger. Ils sont aussi la principale cause des effets de stick-slip ce qui peut déstabiliser le système. Le modèle utilisé [40] prend en compte les frottements statiques et dynamiques. Ils permettent surtout de mettre la vitesse égale à zéro lorsque celle-ci atteint une valeur numériquement faible évitant ainsi les erreurs de calcul et les oscillations autour de zéro.

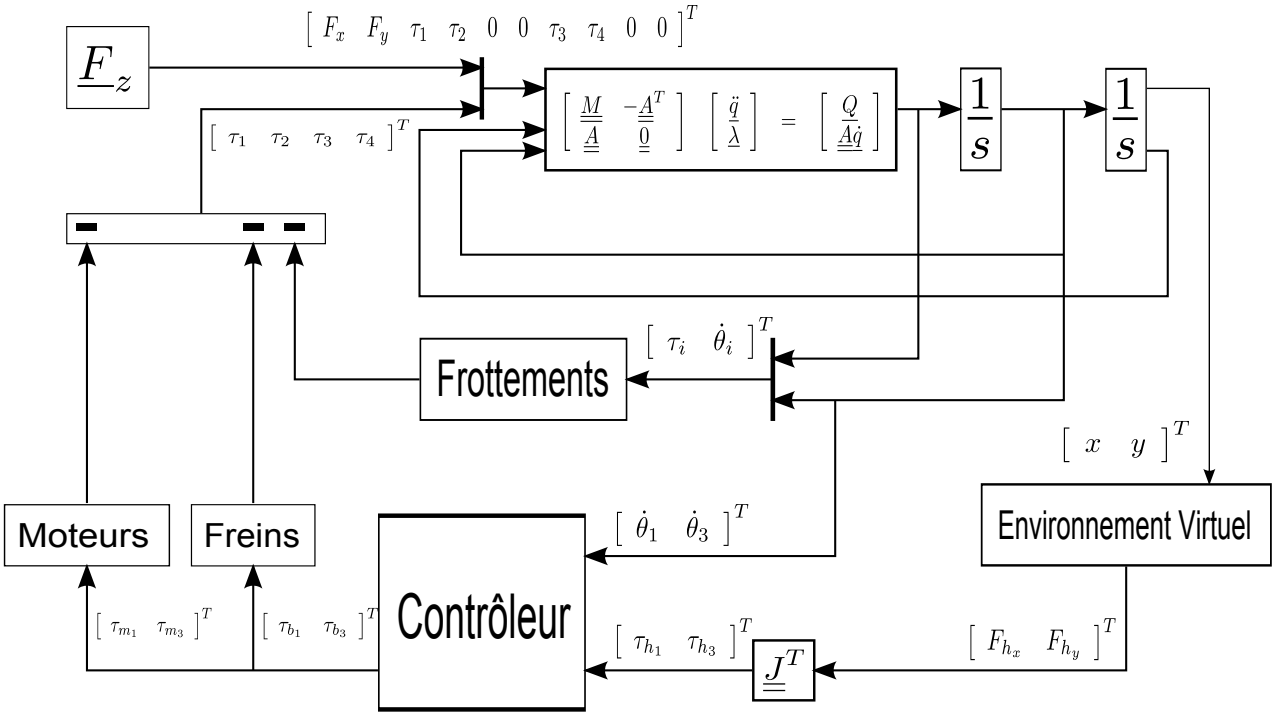


FIGURE 24 – Schéma simplifié de la loi de commande du système 5-barres avec 2 actionneurs hybrides en 1 et 3 (Voir Figure 13b). Ici, le temps d'échantillonnage n'est pas pris en compte. Le contrôleur récupère les vitesses dans les actionneurs, les comparent avec les couples désirés et distribue les couples à travers les freins et moteurs.

7.9 Simulation de murs virtuels

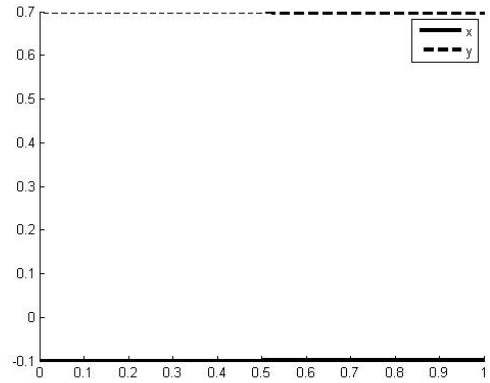
Dans les prochaines simulations, la force imposée par l'utilisateur est toujours constante égale à 2N dans le temps, elle correspond à un step commençant au temps $t = 0.5s$. Dans cette simulation, on est sûr que l'effort désiré se situe à l'intérieur d'une ZP à tout instant t. Dans les deux cas, le système bloque l'effecteur lorsque l'effecteur pénètre trop dans le mur. Cependant la force imposée par l'environnement virtuel (Figure 25b et 26b) est 2 fois plus grande que la force utilisatrice ($4N$ contre $2N$). Ceci est du à l'inertie du système, et cela est aussi une conséquence d'une force d'entrée

en échelon. En effet, une rampe à pente relativement douce entraine valeur de force imposée par l'environnement virtuel quasiment égale à celle de la force utilisatrice. Le système 5-barres présente un faible déplacement selon l'axe des x et des y (Figure 25a). Le déplacement selon les x s'explique par le fait que l'effecteur n'est pas positionné à la symétrie du système. La Figure 26d du système 6-barres montre que les 3 freins sont tous les trois actifs simultanément. Or la commande ne demande que l'actionnement d'au maximum deux freins simultanément. Le contrôleur implémenté dans la simulation n'est donc pas correcte et les résultats du système 6-barres ne peuvent être exploités.

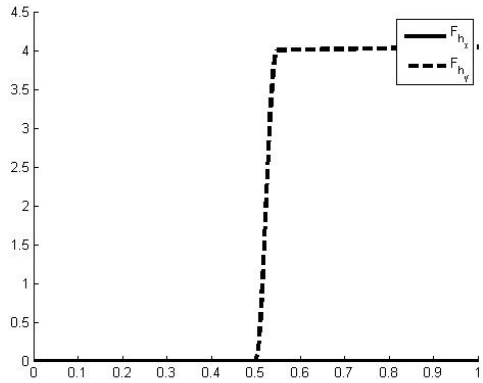
Une deuxième simulation considère cette une force imposée par l'utilisateur orientée de $-\pi/2rad$ avec un mur virtuel tel que la force calculée par l'environnement virtuel soit de même direction et de sens opposé (Figures 27e. Cette fois, le système 5-barres est incapable d'utiliser les freins. Seuls les moteurs sont donc activés et l'effecteur pénètre dans le mur (Figure 27f).

7.9.1 Suivi d'un mur virtuel

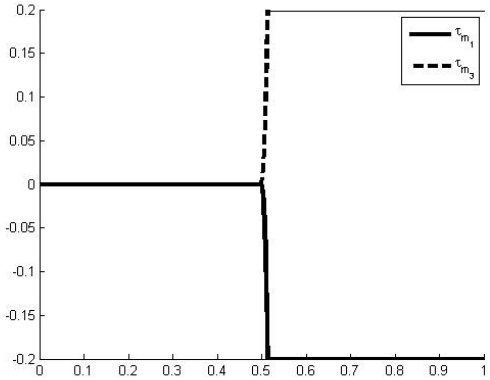
Cette seconde simulation permet de tester le système lors du suivi d'une mur virtuel. La simulation est stoppée lorsque le système approche une singularité (Figure 28. Au temps 0.7s, les freins agissent de manière très brève. Cependant les moteurs, à eux seuls, peuvent assurer le retour d'effort.



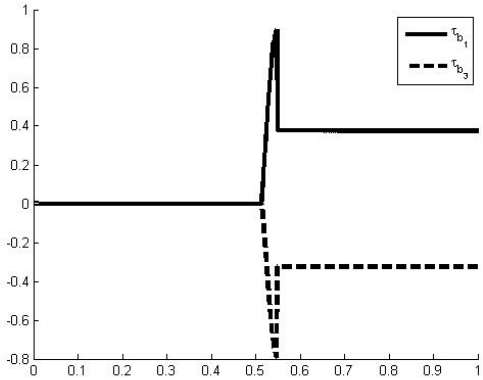
(a) Position de l'effecteur en fonction du temps



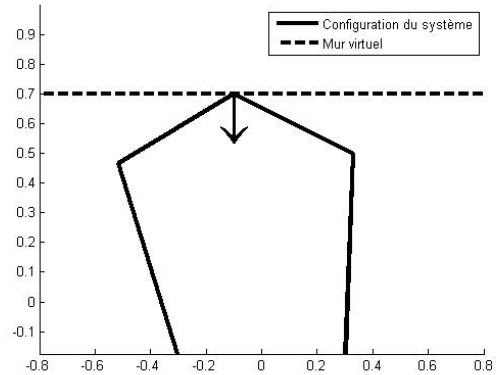
(b) F_h en fonction du temps



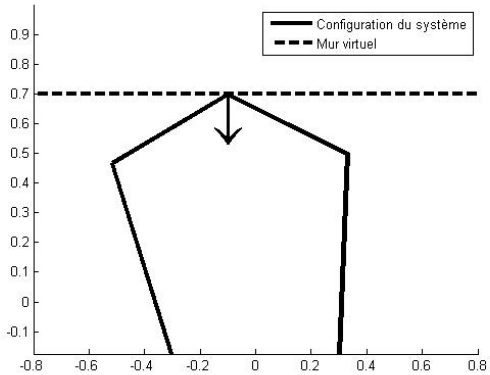
(c) τ_m en fonction du temps



(d) τ_b en fonction du temps



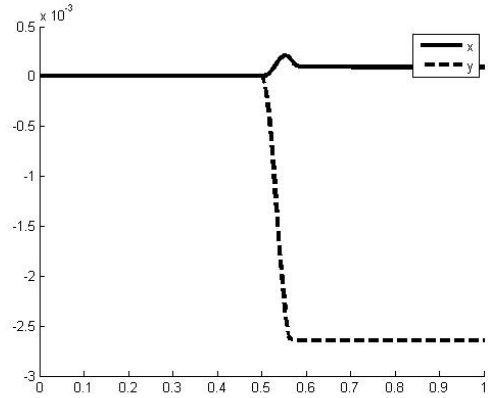
(e) Configuration de départ. La flèche représente la force utilisatrice



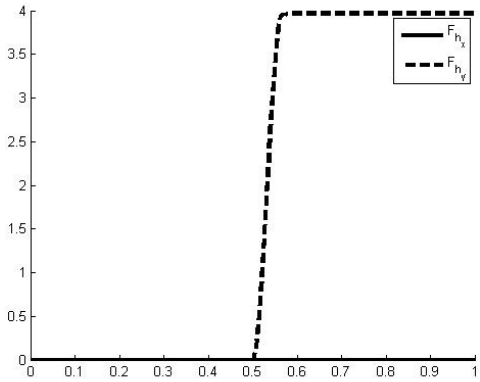
(f) Configuration de fin. La flèche représente la force utilisatrice

FIGURE 25 – Résultat de la simulation en ZP. A tout instant t, la force de retour se situe dans la ZP. Ceci est bien confirmé par la simulation car les freins sont toujours utilisés. La force utilisatrice est constante et égale à 2N. On remarque que la force de retour atteint 4N (figure 27b) soit deux fois plus que la force imposée par l'utilisateur. L'effecteur n'est pas sur la symétrie en x ce qui entraine une légère déviation de l'effecteur selon les x 25a

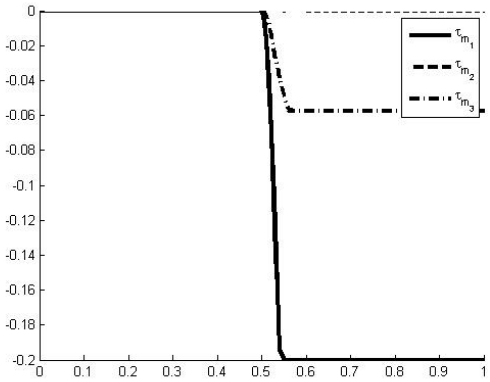
.



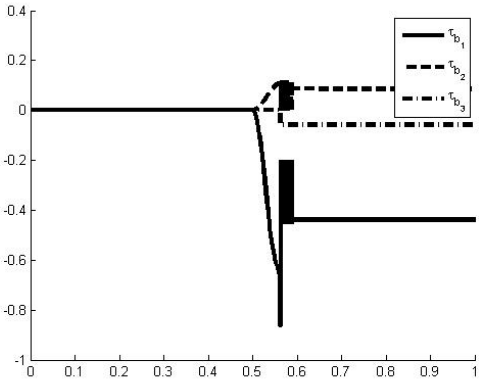
(a) Position de l'effecteur en fonction du temps



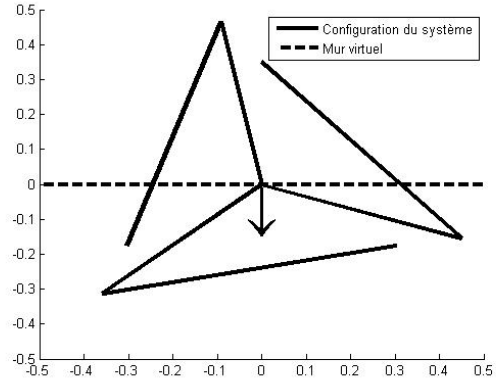
(b) F_h en fonction du temps



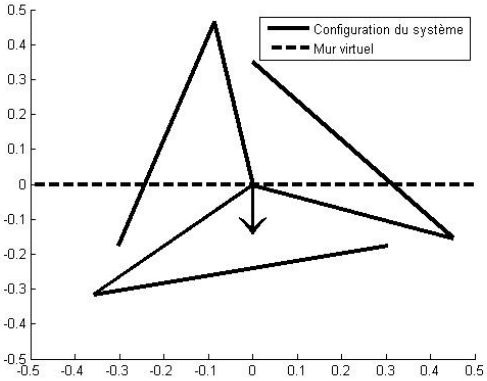
(c) τ_m en fonction du temps



(d) τ_b en fonction du temps

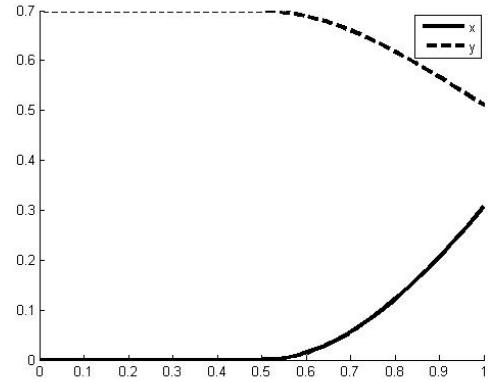


(e) Configuration de départ. La flèche représente la force utilisatrice

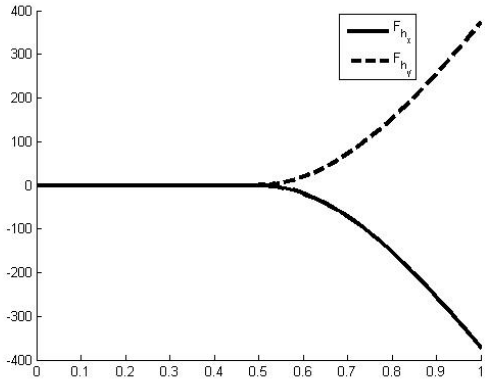


(f) Configuration de départ. La flèche représente la force utilisatrice

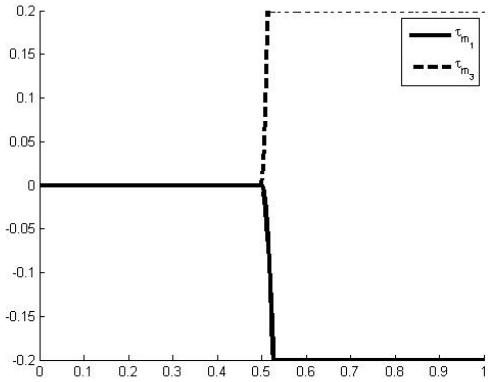
FIGURE 26 – Résultat de la simulation en ZP du système 6-barres. A tout instant t, la force de retour se situe dans la ZP. Ceci est bien confirmé par la simulation car les freins sont toujours utilisés. La force utilisatrice est constante et égale à 2N. On remarque que la force de retour atteint 4N (figure 26b) soit deux fois plus que la force imposée par l'utilisateur. Cependant, on remarque que les freins agissent tous les trois en même temps ce qui signifie que le contrôleur ne joue pas son rôle de distributeur entre les actionneurs.



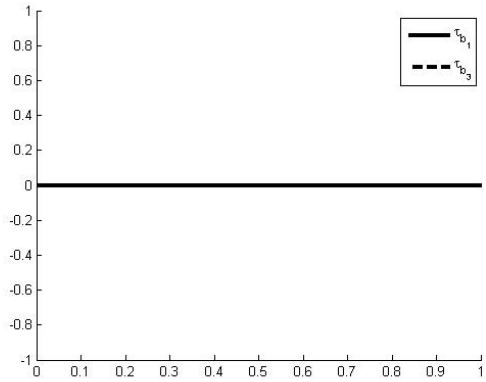
(a) Position de l'effecteur en fonction du temps



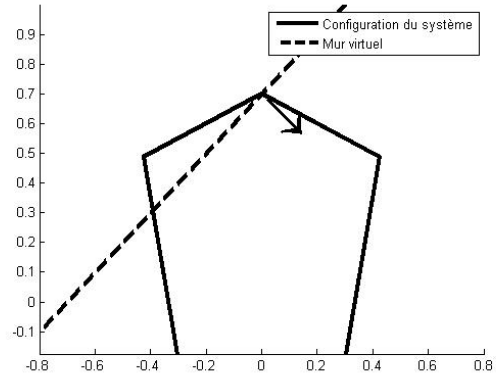
(b) F_h en fonction du temps



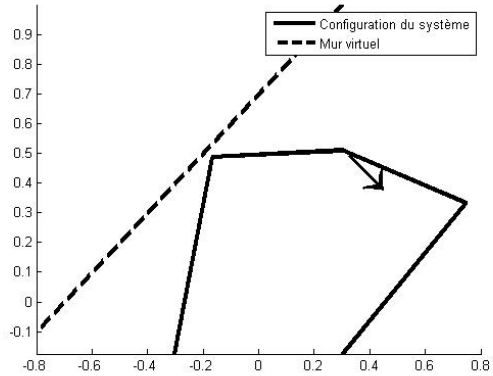
(c) τ_m en fonction du temps



(d) τ_b en fonction du temps

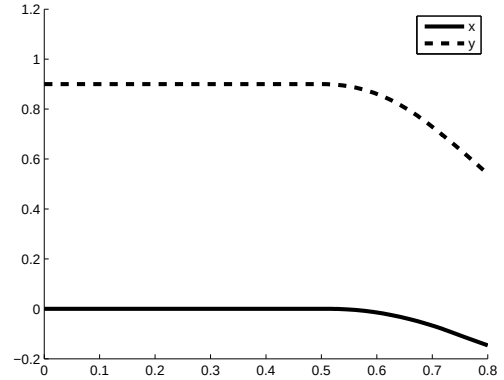


(e) Configuration de départ. La flèche représente la force utilisatrice

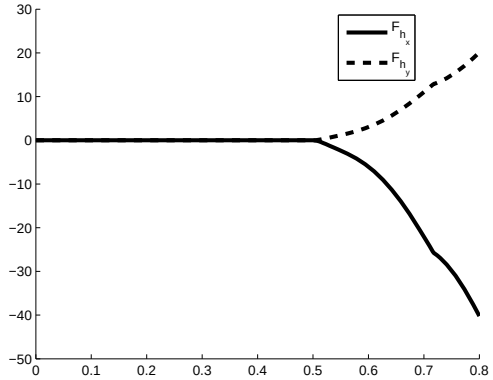


(f) Configuration finale. La flèche représente la force utilisatrice

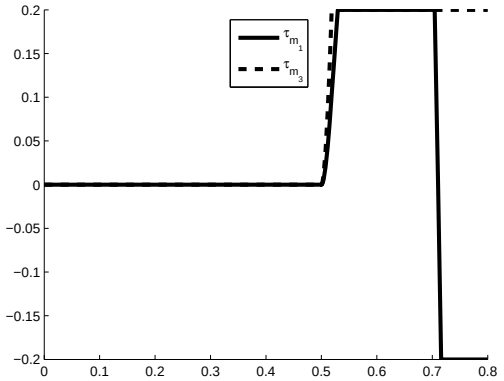
FIGURE 27 – Résultat de la simulation en ZSP. On voit dans la Figure 27d que les freins ne sont jamais activés. L'effort imposée par l'utilisateur étant supérieur au couple de saturation des moteurs (Figure 27c l'effecteur pénètre le mur (Figure 27f).



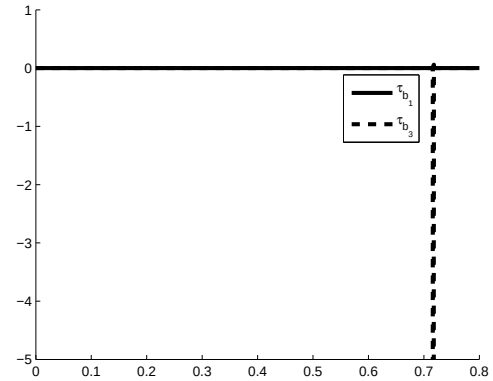
(a) Position de l'effecteur en fonction du temps



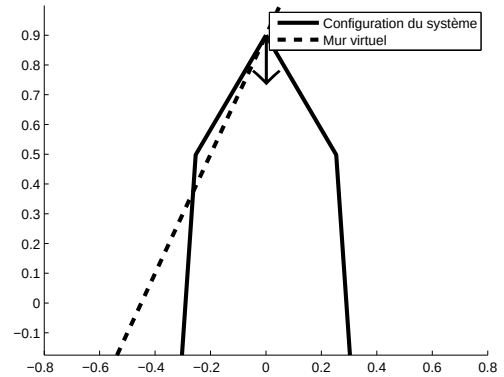
(b) F_h en fonction du temps



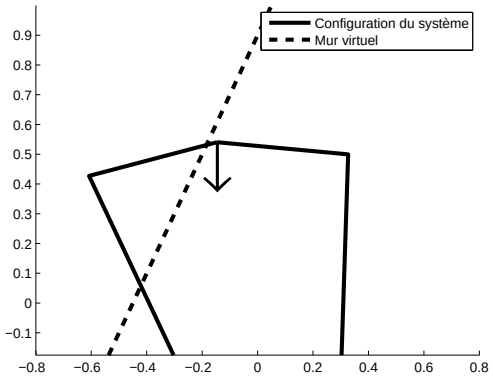
(c) τ_m en fonction du temps



(d) τ_b en fonction du temps



(e) Configuration finale. La flèche représente la force utilisatrice



(f) Configuration de départ. La flèche représente la force utilisatrice

FIGURE 28 – Résultat de la simulation le long d'un mur virtuel du système 5-barres. Les efforts sont potentiellement dirigés dans les ZSP. Les freins ne sont employés qu'à des moment très restreint dans le temps. La force utilisatrice est constante et égale à 2N. On remarque que le signe des moteurs change du tout au tout au temps 0.7s (Figure 28c). En regardant la Figure 28b, on remarque l'effort désiré augmente avec le temps ce qui signifie que l'effecteur, bien qu'il soit repoussé en dehors du mur par les moteurs, a tendance à s'enfoncer dans le mur4

8 Conclusion

Les actionneurs hybrides permettent de résoudre les phénomènes de collage et d'obtenir une grande plage d'impédance pour les systèmes 1DDL. En MDDL, la présence d'une ZSP apparaît i.e. dans une configuration donnée et pour une vitesse donnée, seul un frein est utilisable. Des solutions utilisées pour les systèmes passifs basées sur les commandes ont été implémentées dans la littérature pour supprimer cette contrainte. Cependant elles ne peuvent qu'approximer la force désirée. Les actionneurs hybrides, quant à eux, peuvent toujours réaliser un effort ayant la même direction que la force désirée car les moteurs ne sont pas contraints. En revanche, l'actionneur considéré possède des moteurs de capacité 27.5 fois inférieur aux freins. C'est pourquoi l'étude présentée ici a cherché à maximiser l'utilisation des freins à travers l'espace de travail.

D'après les résultats théoriques, un système MDDL comportant des actionneurs hybrides nécessite d'employer des redondances pour optimiser son fonctionnement. Les deux critères de volume relatif de la ZP et d'angle de passivité définissent un aperçu du potentiel d'utilisation des freins dans une position et une configuration du système données. Le critère d'angle de passivité représente l'angle que forme la ZP. Il est maximal lorsqu'il se rapproche de π (la valeur de π n'étant atteinte que pour un système 1DDL). Le second critère est le volume relatif de la ZP. Celui-ci représente la capacité qu'on les freins à exercer une force dans une région considérée. Sa valeur maximale est 0.5 et elle est atteinte lorsque le système est à 1DDL. Ces critères montrent que les systèmes redondants sont plus appropriés pour les actionneurs passifs et qu'il est possible de choisir une configuration du système pour laquelle l'utilisation des freins est optimale.

De ce constat, la commande a été établie et deux choix ont été envisagés. Le premier est d'approximer le plus possible la force désirée i.e. même si la force est non atteignable, par exemple dans le cas d'une ZSP, une force de même intensité est appliquée par les actionneurs. La seconde possibilité envisagée est de garder une force colinéaire. La première option permet de toujours avoir un effort imposé par les freins mais il va avoir tendance à dévier l'effecteur de sa trajectoire alors que la seconde option gardera la bonne trajectoire mais autorisera l'effecteur à pénétrer dans le mur.

La simulation exprime les capacités des systèmes 5-barres et 6-barres à appliquer la force calculée par l'environnement virtuel. Les systèmes hybrides ont la possibilité de suivre un mur virtuel. Cependant, si la force désirée tombe dans une zone en dehors de la ZP alors l'effecteur pénètre le mur (Figure 27f).

9 Pour approfondir les recherches

La méthode de calcul pour réaliser l'analyse des freins doit être reconsidérée. En effet, considérer les régions par rapport à des régions de référence (Section 6.4.1) pourrait permettre une meilleure lisibilité des critères de volume relatif de la ZP et d'angle de passivité.

Il faut aussi comparer les réponses des deux types de commande (celle avec qui recherche une norme d'effort constante et celle utilisée dans la simulation qui recherche une force colinéaire). Pour que la simulation soit plus réaliste, il est nécessaire de prendre en compte le temps d'échantillonnage.

Enfin, la recherche d'autres mécanismes ou l'optimisation des systèmes étudiés est une piste d'amé-

lioration de systèmes hybrides.

Références

[1] N. Pernalete, S. Edwards, R. Gottipati, J. Tipple, V. Kolipakam, and R.V. Dubey. Eye-hand coordination assessment/therapy using a robotic haptic device. In *Rehabilitation Robotics, 2005. ICORR 2005. 9th International Conference on*, pages 25–28, 2005.

[2] Diego Borro, J. Savall, A. Amundarain, J.J. Gil, A. Garcia-Alonso, and L. Matey. A large haptic device for aircraft engine maintainability. *Computer Graphics and Applications, IEEE*, 24(6) :70–74, 2004.

[3] Roger Gassert, Ludovic Dovat, Olivier Lambercy, Yves Ruffieux, Dominique Chapuis, Gowrishankar Ganesh, Etienne Burdet, and Hannes Bleuler. A 2-dof fmri compatible haptic interface to investigate the neural control of arm movements. In *Robotics and Automation, 2006. ICRA 2006. Proceedings 2006 IEEE International Conference on*, pages 3825–3831. IEEE, 2006.

[4] Carlos Rossa, José Lozada, and Alain Micaelli. Stable haptic interaction using passive and active actuators. In *Robotics and Automation (ICRA), 2013 IEEE International Conference on*, 2013.

[5] Tae-Bum Kwon and Jae-Bok Song. Force display using a hybrid haptic device composed of motors and brakes. *Mechatronics*, 16(5) :249–257, 2006.

[6] Richard J Adams, Daniel Klowden, and Blake Hannaford. Stable haptic interaction using the excalibur force display. In *Robotics and Automation, 2000. Proceedings. ICRA'00. IEEE International Conference on*, volume 1, pages 770–775. IEEE, 2000.

[7] J.E. Colgate and G. Schenkel. Passivity of a class of sampled-data systems : application to haptic interfaces. In *American Control Conference, 1994*, volume 3, pages 3236–3240 vol.3, 1994.

[8] E. Bonneton. Pantograph project. *Rapport Technique*, 1994.

[9] Masamichi Sakaguchi, Junji Furusho, and Naoyuki Takesue. Passive force display using er brakes and its control experiments. In *Virtual Reality, 2001. Proceedings. IEEE*, pages 7–12. IEEE, 2001.

[10] WH Li, B Liu, Prabuono B Kosasih, and XZ Zhang. A 2-dof mr actuator joystick for virtual reality applications. *Sensors and Actuators A : Physical*, 137(2) :308–320, 2007.

[11] J.E. Colgate, M.A. Peshkin, and W. Wannasuphoprasit. Nonholonomic haptic display. In *Robotics and Automation, 1996. Proceedings., 1996 IEEE International Conference on*, volume 1, pages 539–544 vol.1, 1996.

[12] Davin K Swanson and Wayne J Book. Obstacle avoidance methods for a passive haptic display. In *Advanced Intelligent Mechatronics, 2001. Proceedings. 2001 IEEE/ASME International Conference on*, volume 2, pages 1187–1192. IEEE, 2001.

[13] Carlos Rossa, José Lozada, and Alain Micaelli. Interaction power flow based control of a 1-dof hybrid haptic interface. In Poika Isokoski and Jukka Springare, editors, *Haptics : Perception, Devices, Mobility, and Communication*, volume 7283 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 151–156. Springer Berlin / Heidelberg, 2012.

[14] Changhyun Cho, Munsang Kim, and Jae-Bok Song. Direct control of a passive haptic device based on passive force manipulability ellipsoid analysis. *International Journal of Control Automation and Systems*, 2 :238–246, 2004.

[15] Changhyun Cho, Jae-Bok Song, and Munsang Kim. Energy-based control of a haptic device using brakes. *Systems, Man, and Cybernetics, Part B : Cybernetics, IEEE Transactions on*, 37(2) :341–349, 2007.

[16] O. Baser, E.I. Konukseven, and H. Gurocak. Stability and transparency improvement in haptic device employing both mr-brake and active actuator. In *RO-MAN, 2012 IEEE*, pages 12–18, 2012.

[17] Dominique Chapuis, R. Gassert, E. Burdet, and H. Bleuler. Hybrid ultrasonic motor and electro-rheological clutch system for mr-compatible haptic rendering. In *Intelligent Robots and Systems, 2006 IEEE/RSJ International Conference on*, pages 1553–1557, 2006.

[18] François Conti and Oussama Khatib. A new actuation approach for haptic interface design. *The International Journal of Robotics Research*, 28(6) :834–848, 2009.

[19] Jonathan VAN RHIJN. *Contribution à l'étude et au développement des systèmes adaptables pour les robots reconfigurables : application à la corobotique.* Thèse de doctorat, INSA Rennes, 2011.

[20] Richard P Paul. *Robot manipulators : mathematics, programming, and control : the computer control of robot manipulators.* the MIT Press, 1981.

[21] Tsuneo Yoshikawa. Analysis and control of robot manipulators with redundancy. In *Robotics research : the first international symposium*, pages 735–747. Mit Press Cambridge, MA, 1984.

[22] Changhyun Cho, Munsang Kim, and Jae-Bok Song. Performance analysis of a 2-link haptic device with electric brakes. In *Haptic Interfaces for Virtual Environment and Teleoperator Systems, 2003. HAPTICS 2003. Proceedings. 11th Symposium on*, pages 47–53, 2003.

[23] Matthew R Reed and Wayne J Book. Modeling and control of an improved dissipative passive haptic display. In *Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA'04. 2004 IEEE International Conference on*, volume 1, pages 311–318. IEEE, 2004.

[24] Yasuhisa Hirata, Keitaro Suzuki, and Kazuhiro Kosuge. Improvement in the performance of passive motion support system with wires based on analysis of brake control. In *Robotics and Automation (ICRA), 2011 IEEE International Conference on*, pages 4272–4277. IEEE, 2011.

[25] Clément Gosselin. *Kinematic analysis, optimization and programming of parallel robotic manipulators.* 1989.

[26] C. Gosselin and J. Angeles. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, 6(3) :281–290, 1990.

[27] JP Merlet. Jacobian, manipulability, condition number, and accuracy of parallel robots. *Journal of Mechanical Design*, 128 :199, 2006.

[28] Tsuneo Yoshikawa. Dynamic manipulability of robot manipulators. In *Robotics and Automation. Proceedings. 1985 IEEE International Conference on*, volume 2, pages 1033–1038. IEEE, 1985.

[29] Vincent Hayward, Jehangir Choksi, Gonzalo Lanvin, and Christophe Ramstein. Design and multi-objective optimization of a linkage for a haptic interface. *Advances in Robot Kinematics*, pages 352–359, 1994.

[30] Clement Gosselin and Jorge Angeles. A global performance index for the kinematic optimization of robotic manipulators. *Journal of Mechanical Design*, 113 :220, 1991.

[31] Jin-Oh Kim and K Khosla. Dexterity measures for design and control of manipulators. In *Intelligent Robots and Systems' 91.'Intelligence for Mechanical Systems, Proceedings IROS'91. IEEE/RSJ International Workshop on*, pages 758–763. IEEE, 1991.

[32] John F O'Brien and John T Wen. Redundant actuation for improving kinematic manipulability. In *Robotics and Automation, 1999. Proceedings. 1999 IEEE International Conference on*, volume 2, pages 1520–1525. IEEE, 1999.

[33] J Jesús Cervantes-Sánchez, J Cesar Hernández-Rodriguez, and J Gabriel Rendón-Sánchez. On the workspace, assembly configurations and singularity curves of the rrrrr-type planar manipulator. *Mechanism and Machine Theory*, 35(8) :1117–1139, 2000.

[34] Tian Huang, Meng Li, Zhanxian Li, Derek G Chetwynd, and David J Whitehouse. Optimal kinematic design of 2-dof parallel manipulators with well-shaped workspace bounded by a specified conditioning index. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, 20(3) :538–543, 2004.

[35] Xing-Fei Yuan, Lian Zhou, and Yuan-Feng Duan. Singularity and kinematic bifurcation analysis of pin-bar mechanisms using analogous stiffness method. *International Journal of Solids and Structures*, 49(10) :1212–1226, 2012.

[36] Zhuangsheng Zhu and Runliang Dou. Optimum design of 2-dof parallel manipulators with actuation redundancy. *Mechatronics*, 19(5) :761–766, 2009.

[37] Pietro Buttolo and Blake Hannaford. Advantages of actuation redundancy for the design of haptic displays. In *Proceedings ASME, Fourth Annual Symposium on Haptic Interfaces for Virtual Environment and Teleoperator Systems, S. Francisco*, 1995.

[38] S Kock and Walter Schumacher. A parallel xy manipulator with actuation redundancy for high-speed and active-stiffness applications. In *Robotics and Automation, 1998. Proceedings. 1998 IEEE International Conference on*, volume 3, pages 2295–2300. IEEE, 1998.

[39] Matthew Robert Reed. *Development of an improved dissipative passive haptic display.* PhD thesis, Georgia Institute of Technology, 2003.

[40] Davin Karl Swanson. *Dynamic simulation of an improved passive haptic display.* PhD thesis, Georgia Institute of Technology, 1999.

A Notations & définitions

Cet article utilise les notations mathématiques suivantes :

- $\underline{F}$: Vecteur F
- $\underline{F}_z$: Force imposée par l'utilisateur
- $\underline{F}_h$: Force désirée (calculée par l'environnement virtuel)
- $\underline{F}_b$: Force développée par le(s) frein(s)
- $\underline{F}_m$: Force développée par le(s) moteur(s)
- $\underline{\underline{A}}$: Tenseur A
- $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$: Dérivée par rapport en temps de x
- R_i : Base définie par le repère (O_i, x_i, y_i)
- $\underline{\dot{x}}^0(P)$: Vitesse dans R_0 du point P
- $\underline{\dot{x}}_1^0(P)$: Vitesse de R_1 par rapport à R_0 du point P
- $\underline{M}_{\underline{F}}(O_i)$: Moment développé par la force $\underline{F}$ au point O_i
- $\tau_i^{\pm}$: Signe de τ_i
- $\underline{\underline{J}}$: Matrice Jacobienne du mécanisme

Et quelques définitions :

Définition 3 (MDDL) *Un système est système multi-degrés de liberté. Lorsque "M" est remplacé par un chiffre, cela correspond au nombre de degrés de liberté du système (exemple : 2DDL)*

Définition 4 (Espace articulaire) *L'espace articulaire (ou espace angulaire) est l'espace dont la base est formée par les paramètres de liaison.*

Définition 5 (Espace opérationnel) *L'espace opérationnel est l'espace dont la base est formée par un repère galiléen ramené à l'organe terminal (effecteur) i.e.* $(E, \underline{x}_0, \underline{y}_0)$ *(ou E est un point de l'effecteur).*

Définition 6 (Région) *Les régions d'un système représentent les parties d'un ellipsoïde pour lesquelles on peut définir une unique combinaison de signes des actionneurs. Elles sont toujours associées aux ellipsoïdes-vitesse pour les systèmes redondants.*

Définition 7 (Zone) *On parlera de zone (ou zone passive ou encore zone de passivité) pour englober l'ensemble des 3 types de zone d'un ellipsoïde i.e. la Zone Passive (ZP), la Zone Semi-Passive (ZSP) et la Zone Active (ZA) (voir 5).*

B Méthode de calcul du volume relatif de la ZP

Toutes les ellipses ayant le même centre E, une méthode simple a pu être mis en place. Dans un premier temps on recherche les vecteurs bornant la ZP, puis on balaie l'angle pour trouver tous les points sur chaque ellipse (notés p_{ij} avec $i = 1, 2, 3$ le numéro de l'ellipse et j le j-ième point). Chacun de ces points est donc associé à un angle unique [1]. A chaque point trouvé sur une ellipse, on recherche les points associés aux autres ellipses et ayant le même angle. Ces nouveaux points sont créés en les interpolant linéairement entre les deux points les plus proches. Par exemple (Figure 29), soit le point p_{1j}. Conservant le même angle, il correspond au point e_{1j} sur la deuxième ellipse mais celui-ci n'est pas directement calculable. Le point interpolé est celui correspondant à l'intersection de la droite (E, p_{1j}) et la droite (p_{2k}, p_{2k+1}). Il en résulte i_{1j}. Ensuite, il ne reste plus qu'à regarder la norme euclidienne pour en déduire l'enveloppe de la ZP. Enfin, le calcul d'aire a été réaliser en faisant l'intégrale de l'enveloppe par pas d'angle. La méthode la plus efficace est le calcul de la succession d'aire des triangles entre deux points proches et le centre (par exemple le triangle $(Ep_{2k}i_{1j})$ puis $(Ei_{1j}p_{2k+1})$ dans notre cas). Il est important de noter que selon le nombre de point, la précision du calcul varie. Pour 100 points par ellipse et dû à l'interpolation, l'enveloppe totale pour un système redondant avec 3 actionneurs aura 300 points soit un pas de $0.021rad$. Cependant, faute de la dilatation lors du passage du cercle à l'ellipse, les points ne sont pas répartis régulièrement. Ils sont plus espacés autour du petit axe et plus resserrés autour du grand axe. Pour éviter une trop mauvaise précision, 300 points par ellipse ont été pris. Pour le système 5-barres à 4 actionneurs, 5 ellipses sont constructibles soit une enveloppe de $300 * 5 = 1500$ points. De manière plus générale le calcul de points se résume à un calcul du nombre d'ellipses. Dans le cas d'un système plan, les ellipses représentant toutes les combinaisons de deux actionneurs, soit n le nombre d'actionneurs alors le nombre d'ellipses n_e est :

$$n_e = \sum_{i=1,j=2,i<j}^{n} \quad \forall (i, j, n) \in \mathbb{N}^3$$

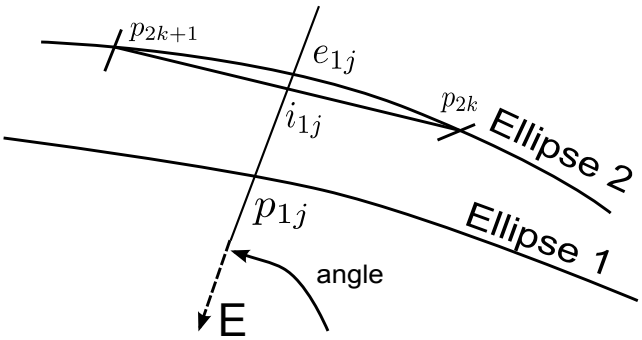


FIGURE 29 – Schéma explicatif de la recherche de points permettant d'identifier pour chaque pas d'angle un point associer à chaque ellipse

1. En effet, les ellipses sont créées à partir des matrices de décomposition en valeurs singulières de $\underline{J}$. Les matrices de dilatation ($= \Sigma$) et de rotation ($= U$ et V) étant toutes différentes, Les points associés à chaque transformation ont une chance quasi-nulle d'avoir le même angle (exception de l'angle 0)